

§ 1. Криволинейные координаты. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора

Пусть R^3 обычное(точечное) трехмерное евклидово пространство. Введем в R^3 прямоугольную декартову систему координат: x_1, x_2, x_3 , ортами которой являются $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Каждой точке $M(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ можно поставить в соответствие радиус-вектор этой точки

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{q}_1 + x_2 \mathbf{q}_2 + x_3 \mathbf{q}_3 = x_i \mathbf{q}_i. \quad (1.1)$$

Здесь и далее принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. По определению $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$ — символ Кронекера и поэтому из (1.1) имеем

$$x_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Радиус-вектор \mathbf{r} из (1.1) можно рассматривать как элемент трехмерного векторного пространства V , за базис которого приняты линейно независимые орты $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Тогда соотношения (1.2) определяют компоненты вектора \mathbf{r} в базисе $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$.

Точку $M(x_1, x_2, x_3) = M(\mathbf{r})$ евклидова пространства R^3 можно определить также и с помощью криволинейных координат y_1, y_2, y_3 . Связь между x_i и y_j будем задавать в виде

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3), \quad y_j = y_j(x_1, x_2, x_3). \quad (1.3)$$

Указанное соответствие будем предполагать взаимно однозначным, так что якобиан преобразования (1.3) отличен от нуля

$$|D| = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) \neq 0.$$

Геометрическое место точек $y_i = \text{const}$. есть поверхность, которую назовем i -ой координатной поверхностью. Координатные поверхности $y_i = \text{const}$. и $y_j = \text{const}$. пересекаются по линии, вдоль которой меняется лишь третья координата y_k ($i \neq j \neq k$). Эта линия суть k -я координатная линия. В силу (1.3) $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{r}(y_1, y_2, y_3)$ и векторы

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_3} \quad (1.4)$$

определяют направления касательных к координатным линиям в точке M .

Поскольку $|D| \neq 0$, то векторы \mathbf{e}_i из (1.4) некопланарны, т. е.

$$W = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0. \quad (1.5)$$

Действительно, W из (1.5) задает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Поэтому $W = 0$ влечет за собой линейную зависимость векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е.

$$\lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 + \nu \mathbf{e}_3 = 0, \quad \lambda, \mu, \nu - \text{const} \neq 0. \quad (1.6)$$

С другой стороны, (1.4) можно переписать следующим образом

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_j} = \frac{\partial x_1}{\partial y_j} \mathbf{q}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_j} \mathbf{q}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y_j} \mathbf{q}_3 = \frac{\partial x_m}{\partial y_j} \mathbf{q}_m.$$

Поэтому координатная запись векторного равенства (1.6) дает

$$(D)(\lambda, \mu, \nu)' = 0,$$

где (D) — матрица преобразования (1.3): $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3)$, а $(\lambda, \mu, \nu)'$ — столбец, так что $'$ — символ транспонирования. Из $|D| \neq 0$ вытекает $\lambda = \mu = \nu = 0$, т. е. линейная независимость векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, определяемых из (1.4). Эти векторы задают *базис* криволинейной системы координат y_1, y_2, y_3 . В связи с (1.3) этот базис часто называют *естественным*. Отметим, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в общем случае не являются единичными и взаимно ортогональными.

Наряду с базисом \mathbf{e}_j введем в рассмотрение *кобазис* (взаимный базис), векторы которого определим следующим образом

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \quad (1.7)$$

Итак, в силу (1.7): $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Это означает, что вектор \mathbf{e}^1 ортогонален векторам \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 , следовательно, параллелен вектору \mathbf{e}_1 . Но тогда $\mathbf{e}^1 = \alpha(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ и $1 = \mathbf{e}_1 \cdot \alpha(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$. Отсюда получаем $\alpha = [\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)]^{-1}$. Тем самым мы приходим к эквивалентному (1.7) определению векторов кобазиса \mathbf{e}^i :

$$\mathbf{e}^1 = \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}{W}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}{W}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{W}. \quad (1.8)$$

Здесь W дается формулой (1.5). Теперь очевидно, что векторы кобазиса \mathbf{e}^i ортогональны к соответствующим координатным поверхностям $y_i = \text{const}$. Поэтому векторы \mathbf{e}^i не компланарны и, следовательно, являются линейно независимыми.

С каждой точкой $M \in R^3$ мы связали тройку линейно независимых векторов базиса \mathbf{e}_j (1.4) и кобазиса \mathbf{e}^i (1.7). Поэтому произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$ допускает разложение как по системе \mathbf{e}_j :

$$\mathbf{u} = u^j \mathbf{e}_j = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + u^3 \mathbf{e}_3, \quad (1.9)$$

так и по системе \mathbf{e}^i :

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u_1 \mathbf{e}^1 + u_2 \mathbf{e}^2 + u_3 \mathbf{e}^3. \quad (1.10)$$

При этом в силу (1.7) для компонент u^j , u_i будем иметь (сравни с (1.2)):

$$u^j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^j, \quad u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.11)$$

Компоненты u^j называют *контравариантными*, компоненты u_i — *ковариантными*.

Пусть y_1, y_2, y_3 — "старая" система криволинейных координат; z_1, z_2, z_3 — "новая" система криволинейных координат. Пусть векторы $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i$ и $\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}^i$ задают базис и кобазис в этих системах. Преобразование "старой" системы координат в "новую" можно определять как соотношениями типа (1.3)

$$y_j = y_j(z_1, z_2, z_3), \quad z_j = z_j(y_1, y_2, y_3), \quad (1.12)$$

так и соотношениями между "старыми" и "новыми" векторами базиса (кобазиса)

$$\hat{\mathbf{e}}_j = a_j^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = b_i^j \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (1.13)$$

Первая из формул (1.13) задает прямое преобразование, вторая — обратное. Будем предполагать, что преобразование $y_i \rightarrow z_j$ является обратимым.

Для вектора $\mathbf{u} \in V$ в "старой" и "новой" системах координат справедливы разложения

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i = \hat{u}^j \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Поэтому

$$\hat{u}^j \mathbf{e}_j = u^i b_i^j \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Следовательно, в силу линейной независимости векторов $\hat{\mathbf{e}}_j$

$$\hat{u}^j = b_i^j u^i. \quad (1.14)$$

Итак, *прямое* преобразование *контравариантных* компонент вектора \mathbf{u} выполняется с помощью коэффициентов *обратного* преобразования векторов базиса.

Из (1.11), (1.13) имеем

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \cdot b_i^j \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j b_i^j = \hat{u}_j b_i^j.$$

Поэтому

$$u_i = b_i^j \hat{u}_j \quad (1.15)$$

и *обратное* преобразование *ковариантных* компонент вектора \mathbf{u} осуществляется с помощью коэффициентов *обратного* преобразования векторов базиса.

Далее заметим, что (1.13) влечет за собой

$$\hat{\mathbf{e}}_j = a_j^m b_m^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \mathbf{e}_i = a_m^\alpha b_i^m \mathbf{e}_\alpha.$$

Но системы векторов $\hat{\mathbf{e}}_j$, \mathbf{e}_i линейно независимы, следовательно,

$$a_j^m b_m^\alpha = \begin{cases} 0, & j \neq \alpha \\ 1, & j = \alpha \end{cases}, \quad a_m^\alpha b_i^m = \begin{cases} 0, & \alpha \neq i \\ 1, & \alpha = i \end{cases}, \quad (1.16)$$

В качестве следствия из (1.15), (1.16) получаем

$$a_j^i u_i = a_j^i \hat{u}_j b_i^j = a_j^i b_i^j \hat{u}_j = \hat{u}_j$$

или

$$\hat{u}_j = a_j^i u_i. \quad (1.17)$$

Поэтому *прямое* преобразование *ковариантных* компонент выполняется с помощью коэффициентов *прямого* преобразования векторов базиса.

И, наконец, из (1.14), (1.16) получаем

$$a_j^i \hat{u}^j = a_j^i b_i^j u^i = u^i$$

или

$$u^i = a_j^i \hat{u}^j. \quad (1.18)$$

Таким образом, *обратное* преобразование *контравариантных* компонент выполняется с помощью коэффициентов *прямого* преобразования векторов базиса.

В качестве полезного следствия из (1.16) стоит отметить, что

$$\hat{\mathbf{e}}^j = b_i^j \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{e}^i = a_j^i \hat{\mathbf{e}}^j, \quad (1.19)$$

т. е. *прямое* преобразование *кобазиса* осуществляется с помощью коэффициентов *обратного* преобразования *базиса*. *Обратное* преобразование *кобазиса* осуществляется с помощью коэффициентов *прямого* преобразования *базиса*. Действительно,

$$a_j^i \hat{\mathbf{e}}^j = a_j^i b_i^j \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i, \quad b_i^j \mathbf{e}^i = b_i^j a_j^i \hat{\mathbf{e}}^j = \hat{\mathbf{e}}^j,$$

что и дает (1.19).

Сказанное выше позволяет утверждать, что при переходе от одной системы криволинейных координат — (y_1, y_2, y_3) к другой — (z_1, z_2, z_3) *преобразования*

- векторов базиса \mathbf{e}_i и контравариантных компонент u^i ,
- векторов кобазиса \mathbf{e}^j и ковариантных компонент u_j

являются взаимно обратными.

Формулы преобразования ковариантных и контравариантных компонент вектора \mathbf{u} в "старой" и "новой" системах криволинейных координат мы связали с коэффициентами a_j^i, b_i^j прямого и обратного преобразования векторов базиса (1.13). Соотношения (1.16) устанавливают связь между этими коэффициентами. Сами коэффициенты могут быть реально вычислены с помощью (1.12). Действительно,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_j &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial z_j} = \mathbf{e}_i \frac{\partial y_i}{\partial z_j}, & \hat{\mathbf{e}}_j &= a_j^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_i} = \hat{\mathbf{e}}_j \frac{\partial z_j}{\partial y_i}, & \mathbf{e}_i &= b_i^j \hat{\mathbf{e}}_j.\end{aligned}\quad (1.20)$$

Следовательно,

$$a_j^i = \frac{\partial y_i}{\partial z_j}, \quad b_i^j = \frac{\partial z_j}{\partial y_i}. \quad (1.21)$$

С учетом (1.20), (1.21) формулы (1.14), (1.17) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned}\hat{u}_j &= \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i \frac{\partial y_i}{\partial z_j} = u_i \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \\ \hat{u}^j &= \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}^j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i \frac{\partial z_j}{\partial y_i} = u^i \frac{\partial z_j}{\partial y_i}.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Теперь мы имеем все необходимое для аналитического определения вектора.

Определение. Вектором \mathbf{u} назовем объект, определяемый тремя компонентами u_1, u_2, u_3 или u^1, u^2, u^3 , которые при смене системы координат (1.12) преобразуются по формулам (1.22).

Хотя это определение достаточно формализовано, но оно полностью отражает сущность объекта, называемого вектором, ибо:

1. В этом определении присутствует система координат, порождающая базис $\mathbf{e}_i(M)$ (кобазис $\mathbf{e}^j(M)$).
2. В этом определении присутствуют числа (числовые функции точки $M \in R^3$) $u^i(M), u_j(M)$, которые зависят от системы координат.
3. Базис \mathbf{e}_i (кобазис \mathbf{e}^j) и числа u^i (или u_j) порождают новый объект

$$\mathbf{u} = u_j \mathbf{e}^j = u^i \mathbf{e}_i,$$

который мы и назвали вектором.

4. *Инвариантность* этого объекта связана с тем, что преобразования базисных векторов \mathbf{e}_i и компонент u^i (или \mathbf{e}^j и u_j) при смене системы координат являются взаимно обратными.

Свойство инвариантности вектора как объекта в "формульной" записи можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \hat{u}^j \hat{\mathbf{e}}_j = b_i^j u^i a_j^i \mathbf{e}_i = b_i^j a_j^i u^i \mathbf{e}_i = u^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{u} &= \hat{u}_j \hat{\mathbf{e}}^j = a_j^i u_i b_i^j \mathbf{e}^i = a_j^i b_i^j u_i \mathbf{e}^i = u_i \mathbf{e}^i.\end{aligned}\quad (1.23)$$

В (1.23) вместо коэффициентов прямого a_j^i и обратного b_i^j преобразований можно использовать их значения из (1.21). В этом случае следует переписать (1.16) в такой форме

$$\frac{\partial y_m}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_m} = \delta_j^\alpha, \quad \frac{\partial y_\alpha}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial z_m}{\partial y_i} = \delta_i^\alpha. \quad (1.24)$$

Справедливость соотношений (1.24) легко устанавливается и непосредственно из (1.12). Действительно, пусть

$$\begin{aligned} y_\alpha &= y_\alpha(z_1(y_1, y_2, y_3), z_2(y_1, y_2, y_3), z_3(y_1, y_2, y_3)) \\ z_\alpha &= z_\alpha(y_1(z_1, z_2, z_3), y_2(z_1, z_2, z_3), y_3(z_1, z_2, z_3)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta_i^\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial y_i} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial z_m}{\partial y_i}, \quad \delta_j^\alpha = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_j} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial z_j},$$

что и приводит к (1.24). Коэффициенты a_j^i прямого преобразования являются элементами матрицы Якоби

$$(D) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j} \right) = (a_j^i) = (A). \quad (1.25)$$

Здесь и далее контравариантный индекс соответствует номеру строки, ковариантный — номеру столбца. Коэффициенты b_i^j обратного преобразования являются элементами матрицы

$$\left(\frac{\partial z_j}{\partial y_i} \right) = (b_i^j) = (B), \quad (1.26)$$

которая является обратной для матрицы Якоби (1.25). В самом деле

$$(A)(B) = (a_j^i)(b_m^j) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_m} \right) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial y_m} \right) = (\delta_m^i) = (E).$$

В процессе рассуждений, приводящих к аналитическому определению вектора, использовалось такое казалось бы, наглядное понятие как "радиус-вектор". Векторы естественного базиса (1.4) определяются именно с помощью "радиуса-вектора" (1.1). Строго говоря, в такой наглядности нет особой необходимости, ибо на самом деле *постулируется* лишь возможность каждой точке $M \in R^3$ поставить в соответствие упорядоченную тройку вещественных чисел (y_1, y_2, y_3) , называемых координатами. В этой связи возникают такие геометрические понятия как "координатная поверхность", "координатные линии", которые допускают аналитическое описание. Пусть точка M имеет координаты y_1, y_2, y_3 , а "бесконечно близкая" точка N — координаты $y_1 + dy^1, y_2 + dy^2, y_3 + dy^3$. На координатных линиях, проходящих через точку M зафиксируем точки $N_1(y_1 + dy^1, y_2, y_3)$, $N_2(y_1, y_2 + dy^2, y_3)$, $N_3(y_1, y_2, y_3 + dy^3)$. Упорядоченная пара точек M и N определяет новый объект

$$d\mathbf{R} = \overrightarrow{MN}, \quad (1.27)$$

с которым можно связать направление: от M к N . Такую же "направленную" природу имеет и объект

$$\alpha d\mathbf{R}, \quad \alpha = \text{const.} \neq 0, \quad (1.28)$$

при $\alpha > 0$ направления объектов (1.27), (1.28) совпадают, при $\alpha < 0$ – противоположны. Как и в (1.27), (1.28) можно ввести направленные объекты \overrightarrow{MN}_i , $\alpha_i \overrightarrow{MN}_i$, а также при $\alpha_i = (dy^i)^{-1}$ объекты

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_i} = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.29)$$

которые назовем векторами базиса. Эти векторы, как нетрудно понять, направлены по касательным к координатным линиям, проходящим через точку M . Точка N является произвольной и

$$d\mathbf{R} = dy^1 \mathbf{e}_1 + dy^2 \mathbf{e}_2 + dy^3 \mathbf{e}_3. \quad (1.30)$$

Величины dy^i назовем контравариантными компонентами объекта $d\mathbf{R}$ в базисе \mathbf{e}_i . Контравариантный характер компонент dy^i следует из формул преобразования дифференциала dz^j (сравни с (1.22))

$$dz^j = \frac{\partial z_j}{\partial y_i} dy^i.$$

Хотя очень часто для координат используется обозначение y^i , все же следует подчеркнуть, что контравариантный характер имеют не сами координаты y^i , а только их дифференциалы dy^i . Векторы базиса \mathbf{e}_i (1.29) в криволинейной системе координат (y_1, y_2, y_3) с началом в точке M и координатными поверхностями $y_i = \text{const}$ имеют компоненты $\delta_i^1, \delta_i^2, \delta_i^3$. Радиус-вектор произвольной точки $M(x^1, x^2, x^3)$ можно теперь (сравни с (1.1)) определить как вектор \mathbf{r} , имеющий декартовы компоненты x_i в декартовом базисе \mathbf{q}_i .

И в заключение этого параграфа отметим, что координаты точки M можно рассматривать в качестве векторного аргумента скалярной функции $f(M) = f(y_1, y_2, y_3)$. Тогда по определению

$$df(M) = \frac{\partial f}{\partial y_1} dy^1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} dy^3.$$

Поскольку каждой точке M можно поставить в соответствие произвольную бесконечно близкую точку N , то определен направленный объект \overrightarrow{MN} . Поэтому определена и векторная функция векторного аргумента, для которой в соответствии с (1.27)–(1.30) имеем

$$\overrightarrow{MN} = d\mathbf{R}(M) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_1} dy^1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_2} dy^2 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_3} dy^3.$$

Инвариантный характер векторного объекта $d\mathbf{R}$ является естественным обобщением известного из анализа свойства инвариантности формы первого дифференциала $df(M)$ при допустимых ($|D| = \left| \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \right| \neq 0$) преобразованиях $z_j \longleftrightarrow y_i$

$$df = \frac{\partial f}{\partial z_j} dz^j = \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial y_i} dy^i = \frac{\partial f}{\partial y_i} dy^i.$$

§ 2. Тензор. Диада. Инвариантное представление тензора. Метрический тензор

Векторы являются частным случаем более общих математических объектов, которые обладают свойством инвариантности относительно смены системы координат. Подобного рода объекты называются *тензорами*.

Пусть, например, некоторый объект в какой-либо "старой" системе криволинейных координат y_1, y_2, y_3 задается компонентами разных типов T_{ij} или T^{ij} . Пусть посредством (1.12) введена "новая" система криволинейных координат z_1, z_2, z_3 , в которой тот же объект также задается компонентами разных типов: $\hat{T}_{ij}, \hat{T}^{ij}$. Пусть при этом

$$\hat{T}_{ij} = T_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i} \frac{\partial y_\beta}{\partial z_j}, \quad \hat{T}^{ij} = T^{\alpha\beta} \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta}. \quad (2.1)$$

В этом случае объект, задаваемый компонентами T_{ij}, T^{ij} (или $\hat{T}_{ij}, \hat{T}^{ij}$) называется тензором ранга два. Ранг тензора определяется количеством индексов у соответствующих компонент. В соответствии с (1.22) вектор \mathbf{u} следует называть тензором ранга один. Иногда, в зависимости от типа задаваемых компонент (T_{ij} или T^{ij}) тензор называют ковариантным или контравариантным.

Понятие тензора ранга два тесно связано с диадным (тензорным) произведением векторов. А именно, паре векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ поставим в соответствие тензор T , который обозначим через

$$T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \quad (2.2)$$

и определим с помощью равенства

$$T\mathbf{a} \equiv (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{a} \in V. \quad (2.3)$$

Для объекта (2.2), (2.3) употребляется термин *диада*. По определению

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u^i \mathbf{e}_i) \otimes (v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (2.4)$$

Совокупность чисел $T^{ij} = u^i v^j$ определяет контравариантные компоненты диады. Для компонент T^{ij} естественно использовать матричную форму записи

$$(T^{ij}) = (u^i v^j), \quad (2.5)$$

где i – номер строки, j – столбца.

Перейдем в (2.4) к новой системе координат с базисом $\hat{\mathbf{e}}_i$. Тогда в силу инвариантности вектора как объекта

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \hat{u}^i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{v}^j \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{T}^{ij} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= T^{\alpha\beta} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta) = T^{\alpha\beta} (b_\alpha^i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes b_\beta^j \hat{\mathbf{e}}_j) = \\ &= T^{\alpha\beta} b_\alpha^i b_\beta^j (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) = T^{\alpha\beta} \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\hat{T}^{ij} = T^{\alpha\beta} \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta}. \quad (2.6)$$

Поэтому в соответствии с определением (2.1) компоненты T^{ij} являются контравариантными компонентами тензора ранга два $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ в *диадном базисе* $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$.

Итак, мы приходим к инвариантному представлению контравариантного тензора ранга два

$$T = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (2.7)$$

При этом

$$T^{ij} = T \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^i. \quad (2.8)$$

Действительно,

$$T^{ij} = u^i v^j = v^j u^i = (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^i,$$

что и дает (2.8). Как и для вектора \mathbf{u} (1.23) инвариантность объекта (2.7) обеспечивается тем, что преобразования компонент T^{ij} и диад $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ в (2.7) осуществляются с помощью взаимнообратных преобразований

$$\hat{T}^{ij} = T^{\alpha\beta} \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta}, \quad \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial y_\beta}{\partial z_j} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta).$$

Вместо базисных диад $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ в инвариантном представлении (2.7) тензора $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ ранга два можно использовать базисные диады $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)$, $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j)$, $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j)$. Тогда наряду с (2.7) будем иметь

$$T = T_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = T_i^{\cdot j}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{\cdot j}^i(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j), \quad (2.9)$$

где

$$T_{ij} = u_i v_j, \quad T_i^{\cdot j} = v^j u_i, \quad T_{\cdot j}^i = u^i v_j. \quad (2.10)$$

Величины T_{ij} определяют ковариантные компоненты тензора T , а величины $T_i^{\cdot j}$, $T_{\cdot j}^i$ – смешанные компоненты в соответствующих диадных базисах (2.9). Точка внизу или вверху позволяет определить место базисного или кобазисного вектора в диаде. Что касается матричного представления компонент тензора T , то для (T^{ij}) , (T_{ij}) первый индекс соответствует номеру строки. Для матриц $(T_i^{\cdot j})$, $(T_{\cdot j}^i)$ смешанных компонент первым индексом считается контравариантный. Аналогично формуле (2.8) для тензорных компонент (2.10) получаем

$$T_{ij} = u_i v_j = v_j u_i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = T \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.11)$$

$$T_i^{\cdot j} = v^j u_i = (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = T \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.12)$$

$$T_{\cdot j}^i = u^i v_j = v_j u^i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = T \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i. \quad (2.13)$$

Из (2.8), (2.11)–(2.13) вытекает, что для произвольного тензора ранга два его компоненты любого типа определяются базисом \mathbf{e}_i , кобазисом \mathbf{e}^i и действием тензора на векторы базиса $T \mathbf{e}_j$, кобазиса \mathbf{e}^j . Отсюда, в частности, вытекает правомерность употребления термина ”диадный базис”. Действительно, $T = 0$ влечет за собой

$$T^{ij} = T_{ij} = T_i^{\cdot j} = T_{\cdot j}^i = 0,$$

т. е. линейную независимость диад:

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j), \quad (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j), \quad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j).$$

Существенную роль для дальнейшего играет *фундаментальный (метрический) тензор*. Компоненты этого тензора определяются следующим образом

$$\begin{aligned} g_{mi} &= \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i, & g^{mi} &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^i \\ g_i^m &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^m, & g_m^i &= \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_m = \delta_m^i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Нетрудно установить тензорный характер величин g_{mi} , g^{mi} из (2.14). В силу (1.22)

$$\hat{\mathbf{e}}^m = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial z_m}{\partial y_\alpha}, \quad \hat{\mathbf{e}}_m = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_m}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\hat{g}_{mi} &= \hat{\mathbf{e}}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_m} \cdot \mathbf{e}_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial z_i} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_m} \frac{\partial y_\beta}{\partial z_i} \\ \hat{g}^{mi} &= \hat{\mathbf{e}}^m \cdot \hat{\mathbf{e}}^i = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial z_m}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}^\beta \frac{\partial z_i}{\partial y_\beta} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial z_m}{\partial y_\alpha} \frac{\partial z_i}{\partial y_\beta}.\end{aligned}$$

Теперь остается обратиться к определению тензора (2.1).

Матрицы ковариантных (g_{mi}) и контравариантных (g^{mi}) компонент метрического тензора G являются симметричными ($g_{mi} = g_{im}$), ($g^{mi} = g^{im}$), матрицы смешанных компонент – единичными и

$$G = g_{mi}(\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) = (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i) = g^{mi}(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_i). \quad (2.15)$$

Из (2.14) вытекает, что

$$\mathbf{e}^m = g^{mi} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_m = g_{mi} \mathbf{e}^i. \quad (2.16)$$

Учтем теперь (1.11). Тогда

$$\mathbf{u} = u^\beta \mathbf{e}_\beta = u^\beta g_{\beta\alpha} \mathbf{e}^\alpha = u_\alpha \mathbf{e}^\alpha = u_\alpha g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta,$$

следовательно,

$$u^m = u_\alpha g^{\alpha m}, \quad u_m = u^\beta g_{\beta m}. \quad (2.17)$$

Аналогичные формулы можно получить и для разноименных компонент тензора T ранга два. Действительно,

$$\begin{aligned}T &= T_{\alpha\beta}(\mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta) = T_{\alpha\beta} g^{\alpha i} g^{\beta m} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) = T^{\alpha\beta} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta) = \\ &= T^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta m} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^m) = T_{\alpha\beta} g^{\alpha i} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^\beta) = T^i_{\cdot\beta} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^\beta).\end{aligned}$$

Поэтому разноименные компоненты одного и того же тензора связаны следующим образом

$$T^{ij} = T_{\alpha\beta} g^{\alpha i} g^{\beta j}, \quad T_{ij} = T^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \quad T^i_{\cdot j} = T_{\alpha j} g^{\alpha i}. \quad (2.18)$$

Для (2.16)–(2.18) часто употребляется словосочетание ”формулы жонглирования индексами”. Подобное жонглирование применимо для компонент тензора любого ранга. Общее правило здесь таково: ковариантный индекс поднимается в соответствии с первой формулой (2.17), контравариантный индекс опускается в соответствии со второй формулой (2.17).

В качестве следствия из (2.16) получаем

$$\delta_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = g^{j\alpha} g_{i\beta} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{j\alpha} g_{i\beta} \delta_\alpha^\beta = g^{j\alpha} g_{i\alpha},$$

т.е.

$$g_{i\alpha} \cdot g^{j\alpha} = \delta_i^j. \quad (2.19)$$

Поэтому матрица ковариантных компонент метрического тензора (g_{im}) является обратной к матрице контравариантных компонент (g^{jm}), т. е. $(g_{im})(g^{jm}) = E$. Если $g = \det(g_{im})$, $\bar{g} = \det(g^{jm})$, то

$$g\bar{g} = \det(g_{im}g^{mj}) = \det(\delta_i^j) = 1.$$

Далее мы рассмотрим результат действия фундаментального тензора G на произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$. Согласно (2.15) тензор G можно задать в различных диадных базисах. Соответственно и вектор \mathbf{u} можно определить как ковариантными, так и контравариантными компонентами. Будем считать, что

$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$, а $G = (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\alpha) = (\mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha)$. С помощью (2.16)–(2.18) к этим двум случаям сводятся все остальные. Итак,

$$\begin{aligned} G\mathbf{u} &= (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\alpha) u^i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^\alpha) u^i \mathbf{e}_\alpha = u^i \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \\ G\mathbf{u} &= (\mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) u^i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\alpha) u^i \mathbf{e}^\alpha = g_{i\alpha} u^i \mathbf{e}^\alpha. \end{aligned}$$

Для $g_{i\alpha} u^i \mathbf{e}^\alpha$ формулы жонглирования (2.16), (2.17) дают

$$\mathbf{u} = u_\alpha \mathbf{e}^\alpha = g_{i\alpha} u^i \mathbf{e}^\alpha = u^i \mathbf{e}_i = \mathbf{u}.$$

Поэтому в любом случае

$$G\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (2.20)$$

и мы имеем все основания определить фундаментальный тензор G как тождественный (единичный) оператор при отображении $V \rightarrow V$.

Скалярное произведение векторов определено пока только для векторов базиса \mathbf{e}_i и кобазиса \mathbf{e}^j . Для произвольных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ это действие лишь формально обозначено. Задание метрического тензора G (2.14) позволяет ввести операцию $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ для общего случая. По определению

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^i \mathbf{e}_i \cdot v^j \mathbf{e}_j = u^i v^j g_{ij} = u^i v_i = u_j v^j = u_j v_i g^{ij}. \quad (2.21)$$

Тогда для квадрата длины вектора \mathbf{u} получим

$$|\mathbf{u}|^2 = g_{ij} u^i u^j = g^{ij} u_i u_j = u^i u_i. \quad (2.22)$$

Если $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$ – угол между направленными объектами (векторами) \mathbf{u}, \mathbf{v} , то по определению

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}. \quad (2.23)$$

Отсюда, в частности, вытекает одна из аксиом скалярного произведения $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$, известная как неравенство Шварца.

Пусть $\mathbf{r}(M)$ – радиус-вектор точки $M(y_i)$, $\mathbf{r}(N)$ – радиус-вектор бесконечно близкой точки $N(y_i + dy^i)$, а векторы $\mathbf{e}_i(M)$ в соответствии с (1.29) задают базис. Учитывая (2.14) можно вычислить квадрат расстояния между парой M, N :

$$\begin{aligned} |d\mathbf{r}|^2 &= |\mathbf{r}(N) - \mathbf{r}(M)|^2 = |\mathbf{r}(y_i + dy^i) - \mathbf{r}(y_i)|^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} dy^i \right|^2 = \\ &= |\mathbf{e}_i \cdot dy^i|^2 = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta dy^\alpha dy^\beta = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Квадратичная форма (2.24) задает метрику пространства V , скалярное произведение в котором определено с помощью (2.21). Что касается (2.21), (2.22), то как нетрудно понять

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot G\mathbf{v}, \quad |\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot G\mathbf{u} = |\mathbf{u}|_G^2 \quad (2.25)$$

Если бесконечно близкая точка N_i лежит на координатной линии, исходящей из M и вдоль которой меняется только координата y_i , то для N_i имеем $dy^i \neq 0$, $dy^j = 0$, $j \neq i$. Поэтому в соответствии с (2.24)

$$|d\mathbf{r}| = |d\mathbf{r}_i| = \sqrt{g_{ii}} dy^i, \quad \text{по } i \text{ не суммировать.} \quad (2.26)$$

Угол между i -ой ($dy^i \neq 0$, $dy^j = 0$, $dy^k = 0$) и j -ой ($dy^i = 0$, $dy^j \neq 0$, $dy^k = 0$) координатными линиями ($i \neq j \neq k \neq i$) определяется как угол между

направленными элементами $d\mathbf{r}_i = \overrightarrow{MN}_i$, $d\mathbf{r}_j = \overrightarrow{MN}_j$. Тогда в соответствии с (2.23)

$$\cos(\widehat{d\mathbf{r}_i, d\mathbf{r}_j}) = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}, \quad \text{по } i, j \text{ не суммировать.} \quad (2.27)$$

Поэтому диагональные элементы матрицы ковариантных компонент (g_{ij}) метрического тензора G "отвечают за растяжение" независимых дифференциалов вдоль i -ой координатной линии. Внедиагональные элементы "отвечают за углы" между соответствующими координатными линиями.

Рассмотрим, наконец, заданную параметрически пространственную кривую $y_i = y_i(t)$, проходящую через бесконечно близкие точки $M(y_i)$, $N(y_i + dy^i)$. Если s – длина дуги, то в силу (2.24)

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta dt^2, \quad \xi_i = \frac{dy^i}{dt}$$

и для длины дуги между точками $P(y_i(t_1))$, $Q(y_i(t_2))$ будем иметь

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta} dt. \quad (2.28)$$

Таким образом, с помощью метрического тензора G (2.14) определяется скалярное произведение (2.21) в V , фундаментальная квадратичная форма (2.24) и все метрические соотношения, связанные с элементами \mathbf{u} , $\mathbf{v} \in V$.

§ 3. Отображение $V \rightarrow V$. Линейный оператор. Матрица оператора. Тензорная алгебра

Итак, базис \mathbf{e}_i и кобазис \mathbf{e}^j порождают новые объекты — диады

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (3.1)$$

и для любого диадного тензора $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ однозначно определяются его компоненты в любом из диадных базисов

$$T = T^{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = T_i^j(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = T_j^i(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j). \quad (3.2)$$

При этом

$$T^{ij} = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^i, \quad T_{ij} = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad T_i^j = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i, \quad T_j^i = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i. \quad (3.3)$$

Из (3.3) вытекает, что матрица любых (ковариантных, контравариантных, смешанных) компонент тензора T определяется базисом (кобазисом) и действием тензора на векторы базиса (кобазиса).

Рассмотрим действие тензора $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ на векторы базиса

$$\begin{aligned} T\mathbf{e}_j &= (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} = (\mathbf{e}_j \cdot v_m \mathbf{e}^m)u^i \mathbf{e}_i = \\ &= v_j u^i \mathbf{e}_i = T_j^i \mathbf{e}_i = \mathbf{p}_j \in V. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4), (3.3) следует

$$T_j^i = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = T_j^i. \quad (3.5)$$

Если $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in V$, то с помощью этой же матрицы (T_j^i) осуществляется отображение $T: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} T\mathbf{a} &= (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a} = a^m (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} = a^m v_j (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^j)\mathbf{u} = \\ &= a^j v_j u^i \mathbf{e}_i = T_j^i a^j \mathbf{e}_i = b^i \mathbf{e}_i = \mathbf{b} \in V \end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = (T_j^i) \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = (T_{\cdot j}^i) \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Матрицу (T_j^i) из (3.4)–(3.6) называют *матрицей тензора T в базисе \mathbf{e}_j* .

Совершенно аналогично определяется *матрица (T_i^j) тензора T в кобазисе \mathbf{e}^j*

$$T\mathbf{e}^j = v^j u_i \mathbf{e}^i = T_i^j \mathbf{e}^i, \quad T_i^j = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = T_{i \cdot}^j. \quad (3.7)$$

С помощью этой матрицы преобразуются ковариантные компоненты вектора при отображении $T: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (T_i^j) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (T_{i \cdot}^j) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Как это следует из (3.5), (3.7) преобразования базиса \mathbf{e}_j и кобазиса \mathbf{e}^j при отображении $T: V \rightarrow V$ осуществляются с помощью транспонированных матриц $(T_j^i)'$, $(T_i^j)'$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (T_j^i)' \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = (T_i^j)' \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Формально до сих пор речь шла о конкретном диадном тензоре $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$. На самом деле подобная конкретность не имеет существенного значения, если говорить о тензоре T как о линейном отображении $T: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$. Действительно, пусть на V задана линейная векторнозначная функция векторного аргумента

$$\mathbf{b} = F(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V. \quad (3.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = F(\mathbf{a}) &= F(a^m \mathbf{e}_m) = a^m F(\mathbf{e}_m) = a^m p_m \mathbf{e}_m = p_m (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m = \\ &= p_m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) \mathbf{a} = \left(\sum_{m=1}^3 p_m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) \right) \mathbf{a} = \tilde{T} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$b^i = \left(\sum_{m=1}^3 p_m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) \right)_i^j a^j = \tilde{T}_j^i a^j, \quad \tilde{T}_j^i = \tilde{T} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i.$$

Если теперь положить $p_m \mathbf{e}_m = \mathbf{u}_m$, то

$$\tilde{T} = \sum_{m=1}^3 (\mathbf{u}_m \otimes \mathbf{e}^m). \quad (3.11)$$

Поэтому (3.10) можно рассматривать как результат действия суммы трех диад (3.11), т. е. тензора ранга два на вектор \mathbf{a} . Случай $\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \otimes \mathbf{v}_i$ сводится к только что рассмотренному, ибо

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_i \otimes \mathbf{v}_i) &= (\mathbf{w}_i \otimes v_{mi} \mathbf{e}^m) = (v_{mi} \mathbf{w}_i \otimes \mathbf{e}^m) = \\ &= (\mathbf{u}_m \otimes \mathbf{e}^m), \quad \mathbf{u}_m = v_{mi} \mathbf{w}_i, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Следовательно, произвольный тензор T ранга два задает некоторое линейное отображение $V \rightarrow V$.

Определение. *Линейное отображение T векторного пространства V в себя называется тензором ранга два.*

Вместо термина "линейное отображение" T часто используется термин "линейный оператор" $T : V \rightarrow V$. Соответствие

$$T \longleftrightarrow (T_j^i), \quad T_j^i = T \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i \quad \text{или} \quad T \longleftrightarrow (T_i^j), \quad T_i^j = T \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i$$

позволяет существенную часть тензорной алгебры отождествить с алгеброй матриц.

Пусть T, L — линейные операторы, которым в одном и том же базисе \mathbf{e}_m соответствуют матрицы $(T_j^i), (L_j^i)$. Произведение (композиция) операторов T, L определяется следующим образом. Если $L : \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{w}, T : \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{b}$, то $M = TL : \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$. Представим матрицу (T) в виде набора строк: $T = (\dots T^i \dots)$, матрицу (L) в виде набора столбцов $L = (\dots L_j \dots)$. Тогда

$$(M) = (TL) = (\dots T^i \dots)(\dots L_j \dots), \quad M_j^i = T_\alpha^i L_j^\alpha \quad (3.12)$$

в соответствии с правилом умножения "строка на столбец". В общем случае $TL \neq LT$, в противном случае операторы T и L называют *коммутируемыми*. Если в (3.12) $M_j^i = \delta_j^i$, то $(M) = (E)$ и оператор $L = T^{-1}$ называется *обратным* к T . Очевидно, что $TT^{-1} = T^{-1}T$ и $(T^{-1}) = (T)^{-1}$.

Пусть \mathbf{e}_m — старый базис, $\hat{\mathbf{e}}_m$ — новый и, например,

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = a_\alpha^i \mathbf{e}_i, \quad a_\alpha^i = \frac{\partial y_i}{\partial z_\alpha}, \quad (A)_\alpha^i = a_\alpha^i. \quad (3.13)$$

Пусть также (T) — матрица оператора T в старом базисе \mathbf{e}_m , (\hat{T}) — в новом $\hat{\mathbf{e}}_m$. В соответствии с (3.13), (3.4)

$$T \hat{\mathbf{e}}_m = T a_m^\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_m^\alpha T \mathbf{e}_\alpha = a_m^\alpha T_\alpha^i \mathbf{e}_i = (AT)_m^i \mathbf{e}_i.$$

С другой стороны, из (3.5) вытекает, что $\hat{T}_m^\alpha = T \hat{\mathbf{e}}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}^\alpha$ и поэтому

$$T \hat{\mathbf{e}}_m = \hat{T}_m^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha = \hat{T}_m^\alpha a_\alpha^i \mathbf{e}_i = (\hat{T}A)_m^i \mathbf{e}_i.$$

Следовательно, $(\hat{T}A)_m^i = (AT)_m^i$, т. е.

$$(\hat{T}) = (A)(T)(A)^{-1}, \quad (A)_\alpha^i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial z_\alpha} \right). \quad (3.14)$$

Если переход к новому базису определять с помощью матрицы (B) преобразования контравариантных компонент вектора $\mathbf{u} \in V$

$$\hat{u}^\alpha = b_i^\alpha u^i, \quad b_i^\alpha = \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i}, \quad (B)_i^\alpha = b_i^\alpha,$$

то в силу (1.24) $(B) = (A)^{-1}$ и (3.14) можно переписать следующим образом

$$(\hat{T}) = (B)^{-1}(T)(B), \quad (B)_i^\alpha = \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i}. \quad (3.15)$$

Итак, *матрицы линейного оператора (тензора ранга два) в различных базисах подобны.*

Как это следует из рассуждений, приводящих к (3.14), в качестве (A) в (3.14) можно выбрать любую невырожденную матрицу (C) , задающую в какой-либо форме переход от старого базиса к новому. Поэтому каждому линейному

оператору $T : V \longrightarrow V$ соответствует класс матриц (\hat{T}) , связанных с (T) соотношениями подобия.

Оператор (тензор) T^* называется *сопряженным* к оператору (тензору) T , если

$$T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot T^*\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.16)$$

Оператор (тензор) T называется *самосопряженным (симметричным)*, если $T = T^*$. Для любого линейного оператора T существует единственный сопряженный оператор T^* . Действительно, для любого $\mathbf{u} \in V$ справедливо разложение $\mathbf{u} = u^m \mathbf{e}_m = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m$ и поэтому, если T^* существует, то в соответствии с (3.16)

$$T^*\mathbf{v} = (T^*\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m = (\mathbf{v} \cdot T\mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m = (\mathbf{e}_m \otimes T\mathbf{e}^m) \mathbf{v}. \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует, что *заданный* линейный оператор T порождает единственный линейный оператор T^* . Понятно также, что эквивалентным определению T^* из (3.16) будет являться определение T^* с помощью (3.17). Ясно, наконец, что если $T : V \longrightarrow V$, то и $T^* : V \longrightarrow V$. Однако здесь уместны некоторые комментарии.

Множество векторов $\mathbf{a} \in V$, для которых $T\mathbf{a} = 0$, называется *ядром оператора* $T : \ker T$. Множество векторов $\mathbf{b} \in V$ таких, что $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$ хотя бы для одного вектора $\mathbf{a} \in V$, называется *образом оператора* $T : \text{im}A$. Разложим V в прямую сумму подпространств

$$V = D_T \dot{+} \ker T, \quad (3.18)$$

где D_T дополнение ядра до V . В соответствии с (3.18) для любого $\mathbf{a} \in V$ будем иметь

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_1 \in D_T, \quad \mathbf{a}_2 \in \ker T.$$

Если задан линейный оператор T такой, что $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, то

$$\mathbf{b} = T\mathbf{a} = T\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2 = T\mathbf{a}_1.$$

Поэтому любой вектор $\mathbf{b} \in \text{im}T$ имеет хотя бы один прообраз из D_T . Этот прообраз является единственным, так как общим для подпространств D_T и $\ker T$ является только нулевой вектор. Таким образом, линейный оператор T устанавливает взаимно однозначное соответствие (изоморфизм) между векторами подпространств D_T и $\text{im}T$. Если размерность (число линейно независимых векторов) пространства V есть $n = \dim V$, то теперь из (3.18) следует

$$n = \dim(\text{im}T) + \dim(\ker T). \quad (3.19)$$

Оператор T называется *невыврожденным* если $\dim(\ker T) = 0$. Такой оператор любой базис V переводит в базис V , каковым можно считать систему векторов $T\mathbf{e}^m$ из (3.17). Невыврожденность линейного оператора T влечет за собою невыврожденность оператора T^* , ибо в противном случае из (3.17) вытекало бы существование ненулевого вектора $\mathbf{v} \in V$, ортогонального всем векторам базиса V . Итак, для невыврожденного оператора T $\dim(\text{im}T) = \dim(\text{im}T^*) = n$.

Пример вырожденного ($\dim \ker T \neq 0$) оператора доставляет диадный оператор $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Действительно, по определению

$$T\mathbf{a} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

и оператор T отображает произвольный вектор $\mathbf{a} \in V$ в одномерное подпространство, натянутое на вектор диады \mathbf{u} . Поэтому

$$\mathbf{a} \in \ker T \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \dim(\ker T) = n - 1, \quad \dim(\text{im}T) = 1.$$

Поскольку

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{p} \cdot \mathbf{w},$$

то в силу (3.16) сопряженным к $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ будет диадный оператор $T^* = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$. Этот оператор также является вырожденным и

$$\mathbf{a} \in \ker T^* \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \dim(\ker T^*) = n - 1, \quad \dim(\operatorname{im} T^*) = 1.$$

Линейная комбинация диадных операторов $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ приводит к вырожденному оператору

$$\tilde{T}\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

В этом случае $\ker \tilde{T}$ есть одномерное подпространство, натянутое на вектор ортогональный плоскости векторов \mathbf{u} , \mathbf{v} . На сей раз

$$\dim(\ker \tilde{T}) = \dim(\ker \tilde{T}^*) = 1, \quad \dim(\operatorname{im} \tilde{T}) = \dim(\operatorname{im} \tilde{T}^*) = n - 1.$$

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы уточнить разложение (3.18). Итак, пусть задан линейный оператор $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, $T : V \rightarrow V$. Тогда

$$T\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot T^*\mathbf{b}.$$

Если $\mathbf{a} \in \ker T$, то $T\mathbf{a} = 0$ и $\mathbf{a} \cdot T^*\mathbf{b} = 0$. Это означает, что $\operatorname{im} T^*$ есть подпространство, ортогональное к $\ker T$. В свою очередь подпространство $\operatorname{im} T$ ортогонально к $\ker T^*$. И, наконец, так как $\dim(\ker T) = \dim(\ker T^*)$, то (3.19) вместе с только что сказанным позволяет утверждать

$$V = \operatorname{im} T \oplus \ker T^* = \operatorname{im} T^* \oplus \ker T. \quad (3.20)$$

Фигурирующие в (3.20) ортогональные подпространства, порождаемые линейными операторами T , T^* играют важную роль в теории линейных операторных уравнений

$$T\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{f} \in V. \quad (3.21)$$

Именно в терминах этих подпространств обычно формулируется классическая

Теорема Фредгольма. *Необходимым и достаточным условием разрешимости (совместности) линейного операторного уравнения (3.21) является ортогональность \mathbf{f} к ядру оператора T^* .*

Таким образом, для совместной задачи (3.21) $\mathbf{f} \in \operatorname{im} T$, т. е. $(\mathbf{f}, \varphi) = 0$, $\forall \varphi : T^*\varphi = 0$ и если $\dim(\ker T^*) = 0$, то задача (3.21) однозначно разрешима. Если $\mathbf{f} \in \operatorname{im} T$, но $\dim(\ker T^*) \neq 0$, то решение задачи (3.21) существует и определяется с точностью до произвольного элемента ядра оператора T (решение неединственно). Если же $\mathbf{f} \notin \operatorname{im} T$, то задачу (3.21) называют *несовместной*, решение такой задачи в обычном смысле и не существует.

Как уже установлено, из невырожденности оператора T вытекает невырожденность оператора T^* , т. е. существование T^{-1} влечет за собой существование $[T^*]^{-1}$. Связь между двумя последними операторами (тензорами) задается следующим образом

$$[T^*]^{-1} = [T^{-1}]^*. \quad (3.22)$$

Действительно, если $\mathbf{b}, \mathbf{v} \in V$ — произвольные векторы, то *единственным* образом определяются векторы $\mathbf{a}, \mathbf{u} \in V$ такие, что $T\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $T^*\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Поэтому

$$\mathbf{b} \cdot [T^{-1}]^*\mathbf{v} = T^{-1}\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot T^*\mathbf{u} = T\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} \cdot [T^*]^{-1}\mathbf{v}. \quad (3.23)$$

Ввиду произвольности векторов \mathbf{b}, \mathbf{v} (3.22) следует теперь из (3.23). Далее, для произвольных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ по определению (3.16) имеем

$$\mathbf{u} \cdot [TL]^* \mathbf{v} = TL\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = L\mathbf{u} \cdot T\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot L^*T^* \mathbf{v}$$

или

$$[TL]^* = L^*T^*. \quad (3.24)$$

Соотношения (3.22), (3.24) можно было бы записать в виде

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*, \quad (TL)^* = (L^*T^*),$$

используя, как обычно, круглые скобки при обозначении матрицы оператора (тензора ранга два) в отображении $V \rightarrow V$. Однако, пока не определена матрица (T^*) как матрица оператора (тензора ранга два) T^* в конкретном базисе (кобазисе).

Если речь идет о матрицах ковариантных или контравариантных компонент тензора T^* в диадных базисах $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, то совершенно очевидно, что

$$(T^*)_{ji} = (T)_{ij}, \quad (T^*)^{ji} = (T)^{ij},$$

т. е. матрицы одноименных компонент тензоров T и T^* связаны между собою операцией транспонирования. Иная ситуация имеет место для матриц T_j^i , T_i^j смешанных компонент тензора в диадных базисах $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$, которые собственно и определяют матрицы тензора (оператора) T в базисе или кобазисе. Пусть (t_{ij}) матрица оператора (тензора) T в базисе, матрица (\tilde{t}_{ij}) — в кобазисе. В соответствии с (3.3), (3.5), (3.16) имеем

$$(t_{ij}) = T_j^i = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_j \cdot T^*\mathbf{e}^i = T^*\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = T^{*i}_{j\cdot}$$

Если вместо (3.5) принять во внимание (3.7), то совершенно аналогично

$$(\tilde{t}_{ij}) = T_i^j = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}^j \cdot T^*\mathbf{e}_i = T^*\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = T^{*j}_{i\cdot}$$

Поэтому

$$(t_{ij}) = (\tilde{t}_{ji}^*), \quad (\tilde{t}_{ij}) = (t_{ji}^*). \quad (3.25)$$

Таким образом, если оператор (тензор) T в базисе (кобазисе) задан матрицей (T) , то оператор (тензор) T^* в кобазисе (базисе) задан матрицей $(T)'$, транспонированной к (T) .

Базис \mathbf{e}_j совпадает с кобазисом \mathbf{e}^j тогда и только тогда, если он ортонормированный. В этом случае матрицы (t_{ij}) и (\tilde{t}_{ij}) не различаются и вместо (3.25) будем иметь $(T) = (T^*)'$.

Итак, если для тензора T ранга два

$$T = (T)^{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (T)_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = (T)_{i\cdot}^j(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = (T)^{i\cdot}_{\cdot j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j),$$

а для сопряженного тензора T^*

$$T^* = (T^*)^{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(T^*)_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = (T^*)_{i\cdot}^j(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = (T^*)^{i\cdot}_{\cdot j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j),$$

то

$$(T^*)^{ij} = (T)^{ji}, \quad (T^*)_{ij} = (T)_{ji}, \quad (T^*)_{i\cdot}^j = (T)^{j\cdot}_{i\cdot}, \quad (T^*)^{i\cdot}_{\cdot j} = (T)^{i\cdot}_{\cdot j}. \quad (3.26)$$

Тензор T называется *симметричным*, если $T = T^*$ и *антисимметричным* (*кососимметричным*), если $T = -T^*$. Произвольный тензор T единственным

образом представляется в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров

$$T = C + D = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*), \quad C = C^*, \quad D = -D^*. \quad (3.27)$$

Если $(c_{ij}), (d_{ij})$ — матрицы тензоров C, D в одном и том же базисе \mathbf{e}_m , то $c_{ij} = c_{ji}, d_{ij} = -d_{ji}$. Отсюда, в частности, вытекает, что для кососимметричного тензора $d_{ii} = 0$. Кроме того,

$$D\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot D^*\mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot D\mathbf{u} \longrightarrow D\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Поэтому

$$T\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = C\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad (3.28)$$

где тензор C определен в (3.27).

Для произвольной квадратной матрицы $(A) = (a_{ij})$ *след матрицы*: $\text{tr}(A)$ определяется следующим образом

$$\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}. \quad (3.29)$$

След диадного тензора $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ по определению

$$\text{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.30)$$

Но

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^i v_i = T^i_i = T^i_i = u_i v^i = T_i^i = T_i^i. \quad (3.31)$$

Из (3.29)–(3.31) вытекает, что для произвольного тензора T ранга два

$$\text{tr} T = T^i_i = \text{tr}(T^i_j) = T_i^i = \text{tr}(T_j^i) = \text{tr} T^*. \quad (3.32)$$

Таким образом, след тензора T совпадает со следом любой из матриц смешанных компонент в диадных базисах $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i$.

Пусть далее тензор $T = ML$, где M – симметричный тензор $M = M^*$, L – кососимметричный $L = -L^*$. Пусть также $(t_{ij}), (m_{ij}), (l_{ij})$ – матрицы тензоров T, M, L в одном и том же базисе. Тогда в соответствии с (3.12) $t_{ii} = m_{ia} l_{ai}$. Но $m_{ia} l_{ai} = m_{ai} l_{ai} = -m_{ia} l_{ia}$. Поэтому

$$0 = m_{ai} l_{ai} + m_{ia} l_{ia} = m_{ai} l_{ai} + m_{\beta k} l_{\beta k} = 2m_{ai} l_{ai} = 2m_{ia} l_{ai} = 2t_{ii}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{tr} T = \text{tr} ML = \sum_i t_{ii} = 0, \quad M = M^*, \quad L = -L^*. \quad (3.33)$$

С помощью операции tr можно ввести *скалярное произведение тензоров*

$$T \cdot M = \text{tr}(TM^*) = \sum_{i,j} T^i_j M^j_i = M \cdot T. \quad (3.34)$$

Тогда для "квадрата длины тензора T " будем иметь

$$|T|^2 = T \cdot T = \text{tr}(TT^*) = \sum_{i,j} t_{ij}^2 > 0. \quad (3.35)$$

Каждый тензор ранга два можно интерпретировать как n^2 -мерный вектор, где $n = \dim V$. Тогда (3.34) при соответствующем введении базиса превращает множество тензоров ранга два в n^2 -мерное векторное евклидово пространство.

Пусть задан линейный оператор (тензор ранга два) $Q : V \longrightarrow V$. Если при отображении $\mathbf{v} = Q\mathbf{u}$ сохраняется длина вектора \mathbf{u} , т. е.

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = Q\mathbf{u} \cdot Q\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2, \quad (3.36)$$

то линейный оператор (тензор) Q называется *ортогональным*. Для ортогонального оператора Q условие (3.36) дает

$$QQ^* = Q^*Q = E, \quad Q^* = Q^{-1}. \quad (3.37)$$

Если существует Q^{-1} , то за определение ортогонального оператора можно принять второе из соотношений (3.37). Из (3.35) вытекает, что

$$|Q|^2 = \text{tr}(QQ^*) = \text{tr}(Q^*Q) = \text{tr}(E) = n.$$

Если $\tilde{T} = QT$, то из (3.35) вытекает также и

$$|\tilde{T}|^2 = \tilde{T} \cdot \tilde{T} = \text{tr}(\tilde{T}^*\tilde{T}) = \text{tr}(T^*Q^*QT) = \text{tr}(T^*T) = T \cdot T = |T|^2.$$

Роль ортогональных операторов (тензоров) в приложениях трудно переоценить уже хотя бы по той причине, что для линейного операторного уравнения (3.21) при $T = Q$, $Q^*Q = E$ имеем

$$Q\mathbf{u} = \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{u} = Q^*\mathbf{f}. \quad (3.38)$$

В качестве достаточно простого примера ортогонального оператора приведем оператор *отражения*

$$H = E - 2 \frac{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}, \quad \mathbf{w} \in V. \quad (3.39)$$

Очевидно, что оператор H самосопряженный, т. е. $H = H^*$. Далее

$$H\mathbf{u} = \mathbf{u} - 2 \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$$

и тогда

$$H\mathbf{u} \cdot H\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 4 \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})^2} - 4 \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}.$$

Таким образом, $H = H^*$ и $H^*H = E$. Термин "отражение" применительно к H из (3.39) употребляется в соответствии с геометрическим смыслом отображения $\mathbf{v} = H\mathbf{u}$. Если P — гиперплоскость в V с вектором нормали \mathbf{w} , а вектор $\mathbf{u} \in P$, то отражение \mathbf{u} относительно P дает вектор \mathbf{v} . Широкое практическое использование преобразования отражения (3.39) в различных вычислительных алгоритмах линейной алгебры обусловлено следующим. Если $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ и в (3.39) $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, то $\mathbf{v} = H\mathbf{u}$. Действительно,

$$H\mathbf{u} = \mathbf{u} - 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{\mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v})} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Поэтому, например, произвольный вектор $\mathbf{u} \in V_m \subseteq V$, $m = \dim V_m \leq n = \dim V$ с компонентами u^1, \dots, u^m можно с помощью (3.39) перевести в "нужный" вектор $\mathbf{v} \in V_m$ с компонентами $v^1 = \pm \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, $v^j = 0$, $j \neq 1$. Вектор \mathbf{w} из (3.39) в этом случае задается компонентами $u^1 = \mp \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, u^2, \dots, u^m .

Определим, наконец, операцию *свертки*, которая специфична именно для тензорных объектов. Суть этой операции заключается в том, что у компонент

тензорных объектов приравниваются разноименные индексы, в результате последние становятся индексами суммирования. Операция свертки приводит к новому тензорному объекту меньшего ранга. Например (см. (2.17), (2.18)),

$$\begin{aligned} u_{\beta}g^{\alpha m} &\longrightarrow u_{\alpha}g^{\alpha m} = u^m \longleftrightarrow G\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad - \text{ вектор,} \\ T_{\beta j}g^{\alpha i} &\longrightarrow T_{\alpha j}g^{\alpha i} = T_j^i \longleftrightarrow GT = T \quad - \text{ тензор.} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Таким образом, жонглирование индексами есть результат умножения некоторого тензора на метрический тензор и дальнейшей свертке по паре индексов различных типов. Далее (см. (2.21), (3.34)),

$$\begin{aligned} u_i v^j &\longrightarrow u_i v^i = c \longleftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = c \quad - \text{ скаляр,} \\ T_{\alpha}^{\beta} M_i^j &\longrightarrow T_j^i M_i^j = d \longleftrightarrow T \cdot M = \text{tr}(TM^*) = d \quad - \text{ скаляр.} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Поэтому скалярное произведение тензорных объектов, заданных "смешанными" компонентами, можно рассматривать как результат умножения этих объектов и последующего свертывания. Если перемножаются тензорные объекты, заданные компонентами одного типа, то в соответствии с (3.40) это умножение следует дополнить умножением на метрический тензор и провести свертку по паре индексов. Сказанное позволяет рассматривать свертку только для разноименной пары ковариантных и контравариантных индексов. И, наконец, приведем здесь формулы (3.6), (3.12), которые уже не нуждаются в комментариях

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^i a^j &\longrightarrow T_j^i a^j = b^i \longleftrightarrow T\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad - \text{ вектор,} \\ T_{\beta}^i L_j^{\alpha} &\longrightarrow T_{\alpha}^i L_j^{\alpha} = M_j^i \longleftrightarrow TL = M \quad - \text{ тензор.} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Соотношения (3.41), (3.42) позволяют сформулировать достаточно общий

Тензорный критерий. Пусть свертывание каких-либо индексных величин $A(\alpha_i)$ с компонентами тензора $B(\beta_j)$ приводит к компонентам тензора $C(\gamma_m)$. Тогда рассматриваемые величины $A(\alpha_i)$ являются компонентами тензора. Тип этих компонент (ковариантный, контравариантный, смешанный) определяется типом индексов.

Практическое использование этого критерия проиллюстрируем на простейшем примере первой группы соотношений из (3.41). Пусть v^j – контравариантные компоненты вектора (тензора ранга один). Поскольку c – тензор нулевого ранга, то в соответствии с критерием величины u_i являются ковариантными компонентами вектора. В самом деле,

$$u_i v^i = c = \hat{u}_j \hat{v}^j = \hat{u}_j b_i^j v^i.$$

Следовательно, $u_i = b_i^j \hat{u}_j = \frac{\partial z_j}{\partial y_i} \hat{u}_j$ или $\hat{u}_j = a_j^i u_i = \frac{\partial y_i}{\partial z_j} u_i$, т. е. при смене координат индексные величины u_i действительно преобразуются как ковариантные компоненты вектора.

Если рассматривать тензор ранга два T как линейный оператор T при отображении $V \longrightarrow V$, то особый интерес представляют такие векторы φ , которые тензором T преобразуются в векторы, отличающиеся от исходных только числовым множителем λ , т. е.

$$T\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi \neq 0. \quad (3.43)$$

Векторы φ из (3.43) называют *главными* (собственными) векторами тензора T , а соответствующие им числа λ – главными (*собственными*) значениями. Соотношение (3.43), которое можно переписать в виде $(T - \lambda G)\varphi = 0$ порождает четыре различных по форме уравнения

$$\begin{aligned} \det(T_{\beta m} - \lambda g_{\beta m}) = 0, & \quad \det(T_{\beta \cdot}^{\alpha} - \lambda g_{\beta}^{\alpha}) = 0 \\ \det(T^{\beta m} - \lambda g^{\beta m}) = 0, & \quad \det(T_{\cdot \alpha}^{\beta} - \lambda g_{\alpha}^{\beta}) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Однако в силу (2.18), (2.19)

$$T_{\beta m} g^{m\alpha} = T_{\beta \cdot}^{\alpha}, \quad g_{\beta m} g^{m\alpha} = g_{\beta}^{\alpha}$$

и поэтому

$$(T_{\beta m} - \lambda g_{\beta m}) g^{m\alpha} = T_{\beta \cdot}^{\alpha} - \lambda g_{\beta}^{\alpha}. \quad (3.45)$$

Так как

$$T^{\beta m} g_{m\alpha} = T_{\cdot \alpha}^{\beta}, \quad g^{\beta m} g_{m\alpha} = g_{\alpha}^{\beta},$$

то и

$$(T^{\beta m} - \lambda g^{\beta m}) g_{m\alpha} = T_{\cdot \alpha}^{\beta} - \lambda g_{\alpha}^{\beta}. \quad (3.46)$$

И, наконец,

$$T_{\beta \cdot}^{\alpha} - \lambda g_{\beta}^{\alpha} = g_{\beta m} (T_{\cdot i}^{m\alpha} - \lambda \delta_i^m) g^{im}. \quad (3.47)$$

Матрицы $(T_{\beta \cdot}^{\alpha} - \lambda g_{\beta}^{\alpha})$ и $(T_{\cdot i}^{m\alpha} - \lambda \delta_i^m)$ в (3.47) подобны, следовательно, из (3.45)–(3.47) вытекает, что уравнения (3.44) имеют одинаковые корни. Для определенности под матрицей тензора $T - \lambda G$ будем понимать его матрицу в базисе, что соответствует заданию собственного вектора φ контравариантными компонентами и характеристическому уравнению

$$\det(T_{\alpha}^{\beta} - \lambda \delta_{\alpha}^{\beta}) = |T_{\alpha}^{\beta} - \lambda \delta_{\alpha}^{\beta}| = 0. \quad (3.48)$$

Основным для дальнейшего будет случай, когда $\dim V = 3$ и $T = T^*$. Последнее означает, что корни характеристического уравнения (3.48) вещественны. Раскрывая (3.48) по степеням λ , получим

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0, \quad (3.49)$$

где

$$J_1 = \text{tr}(T), \quad J_2 = \frac{1}{2}(T_{\alpha}^{\alpha} T_{\beta}^{\beta} - T_{\alpha}^{\beta} T_{\beta}^{\alpha}), \quad J_3 = \det(T)$$

или, по теореме Виета

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \quad J_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Как мы уже убедились, корни характеристического уравнения λ_i не зависят от базиса, в котором тензор T представлен матрицей (T) . Поэтому скалярные величины J_1 , J_2 , J_3 не зависят от системы координат, т. е. являются инвариантами тензора T . Сказанное не означает, что от выбора базиса не зависит структура матрицы тензора T . Более того, естественно даже поставить задачу об отыскании базиса (*канонического*), в котором (T) имеет наиболее простую структуру.

Пусть в (3.49) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Если $T\varphi_i = \lambda\varphi_i$, $T\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, то в силу $T = T^*$ $(\lambda_i - \lambda_j)\varphi_i \cdot \varphi_j = 0$. Поэтому главные (собственные) векторы симметричного тензора T , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. В рассматриваемом случае это влечет за собой линейную независимость системы

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ибо из $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3 = 0$ немедленно следует $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Выберем φ_i за базис и вычислим матрицу (T) в этом базисе. Если $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, то

$$T\mathbf{a} = Ta^i\varphi_i = a^i\lambda_i\varphi_i = b^i\varphi_i,$$

что в матричной записи означает (сравни с (3.6))

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = (T_{i,j}^i)\mathbf{a} = (T)\mathbf{a} \quad (3.50)$$

Если φ_i – базис, то кобазис φ^j однозначно определяется условиями $\varphi_i \cdot \varphi^j = \delta_i^j$. По предположению $T = T^*$, поэтому, как мы видели $\varphi_i \cdot \varphi_j = 0$. Если дополнительно считать векторы φ_i единичными: $\varphi_i \cdot \varphi_i = 1$, то базис φ_i и кобазис φ^j не различаются. Базис, составленный из единичных собственных (главных) векторов тензора T называется *каноническим*. Матрица (T) тензора T в этом базисе — диагональная, т. е. $(T) = \Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. Кроме того,

$$(T_{i,j}) = (T^{i,j}) = (T_{i,j}^i) = (T_{i,j}^j) = \Lambda,$$

а тензор T в диадном базисе представляется следующим образом

$$T = \lambda_i(\varphi_i \otimes \varphi_i), \quad T\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \quad T = T^*, \quad \varphi_i \cdot \varphi_j = \delta_{ij}. \quad (3.51)$$

Пусть снова $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, но $T \neq T^*$. И в этом случае система главных векторов тензора T является линейно независимой. Действительно, если $\mathbf{u} = \lambda\varphi_i + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3 = 0$, то $T\mathbf{u} = 0$, $TT\mathbf{u} = 0$, или

$$(A) \begin{pmatrix} \alpha\varphi_1 \\ \beta\varphi_2 \\ \gamma\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\varphi_1 \\ \beta\varphi_2 \\ \gamma\varphi_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $\varphi_i \neq 0$, а $\det(A) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0$, то $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Поэтому за базис можно принять систему главных векторов тензора T . За кобазис φ^j примем систему главных векторов тензора T^* : $T^*\varphi^j = \mu_j\varphi^j$, что соответствует стандартному определению $\varphi_i \cdot \varphi^j = \delta_i^j$. В самом деле,

$$\lambda_i\varphi_i \cdot \varphi^i = T\varphi_i \cdot \varphi^i = \varphi_i \cdot T^*\varphi^i = \mu_i\varphi_i \cdot \varphi^i$$

и поэтому $\mu_i = \lambda_i$. Системы векторов φ_i, φ^j определены с точностью до нормировки. Можно считать, что $\varphi_i \cdot \varphi^i = 1$. Далее,

$$0 = T\varphi_i \cdot \varphi^j - \varphi_i \cdot T^*\varphi^j = (\lambda_i - \lambda_j)\varphi_i \cdot \varphi^j.$$

Следовательно, действительно $\varphi_i \cdot \varphi^j = \delta_i^j$. Матрицы тензора T в базисе $(T_{i,j}^i)$ и в кобазисе $(T_{i,j}^j)$ являются диагональными: $(T_{i,j}^i) = \Lambda = (T_{i,j}^j)$, а для диадного представления тензора T будем иметь

$$T = \lambda_i(\varphi_i \otimes \varphi^i) = \lambda_i(\varphi^i \otimes \varphi_i). \quad (3.52)$$

В случае кратных собственных значений приведем здесь только диадные представления симметричного тензора T . Если $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, то

$$T = \lambda_1(\varphi_1 \otimes \varphi_1) + \lambda_2[(\varphi_2 \otimes \varphi_2) + (\varphi_3 \otimes \varphi_3)], \quad \varphi_i \cdot \varphi_j = \delta_{ij}. \quad (3.53)$$

Если, наконец, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то

$$T = \lambda_1(\varphi_i \otimes \varphi_i), \quad (3.54)$$

Но тогда для произвольного $\mathbf{u} \in V$ $T\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}$, т. е. \mathbf{u} является собственным вектором тензора T . В этом случае симметричный тензор называют *шаровым*. Для такого тензора справедливо представление $T = \lambda G$, где λ – скаляр, G – метрический тензор.

§ 4. Ковариантное дифференцирование. Тензорный анализ

Пусть задана криволинейная система координат y_1, y_2, y_3 с естественным базисом \mathbf{e}_i и кобазисом \mathbf{e}^i . Если $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u^i \mathbf{e}_i$, то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} (u^i \cdot \mathbf{e}_i) = \frac{\partial u^m}{\partial y_j} \mathbf{e}_m + u^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} (u_i \cdot \mathbf{e}^i) = \frac{\partial u_m}{\partial y_j} \mathbf{e}^m + u_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial y_j} \quad (4.2)$$

Символы Кристоффеля (второго рода) определим следующим образом

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} = \Gamma_{ij}^m \mathbf{e}_m, \quad \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}^m = \Gamma_{ij}^m. \quad (4.3)$$

Так как

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_j} (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta) = \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}^\beta + \frac{\partial \mathbf{e}^\beta}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \Gamma_{\alpha j}^\beta + \Gamma_{\beta j}^\alpha,$$

то

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial y_j} = -\Gamma_{mj}^i \mathbf{e}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}_m = -\Gamma_{mj}^i. \quad (4.4)$$

Итак, по определению, символы Кристоффеля второго рода задают коэффициенты разложения производной векторов базиса (кобазиса) по векторам базиса (кобазиса). Теперь из (4.1)–(4.4) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial u^m}{\partial y_j} \mathbf{e}_m + u^i \Gamma_{ij}^m \mathbf{e}_m = \left(\frac{\partial u^m}{\partial y_j} + u^i \Gamma_{ij}^m \right) \mathbf{e}_m \equiv \nabla_j u^m \mathbf{e}_m \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial u_m}{\partial y_j} \mathbf{e}^m - u_i \Gamma_{mj}^i \mathbf{e}^m = \left(\frac{\partial u_m}{\partial y_j} - u_i \Gamma_{mj}^i \right) \mathbf{e}^m \equiv \nabla_j u_m \mathbf{e}^m. \quad (4.6)$$

Подчеркнутые в (4.5), (4.6) выражения определяют ковариантные производные по y_i контравариантных $\nabla_j u^m$ или ковариантных $\nabla_j u_m$ компонент вектора \mathbf{u} . Итак

- компоненты производной вектора \mathbf{u} по y_j в базисе \mathbf{e}_m равны ковариантным производным по y_j контравариантных компонент вектора \mathbf{u} ,
- компоненты производной вектора \mathbf{u} по y_j в кобазисе \mathbf{e}^m равны ковариантным производным по y_j ковариантных компонент вектора \mathbf{u} .

По определению

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m \leftrightarrow \nabla_j u^m = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u_m \mathbf{e}^m \leftrightarrow \nabla_j u_m = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}_m \quad (4.7)$$

Именно введение ковариантного дифференцирования позволяет сохранить неизменным правило дифференцирования вектора. В криволинейной системе координат y_1, y_2, y_3 это правило (4.7) такое же, как и в прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 . Действительно, хотя в системе x_1, x_2, x_3 $u^m = u_m$, а базисные орты $\mathbf{q}_m = \mathbf{q}^m$ постоянны, тем не менее

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial u^m}{\partial x_j} \mathbf{q}_m \leftrightarrow \frac{\partial u^m}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \cdot \mathbf{q}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \mathbf{q}^m \leftrightarrow \frac{\partial u_m}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \cdot \mathbf{q}_m. \quad (4.8)$$

Теперь остается сравнить (4.7) и (4.8).

Способ фактического вычисления ковариантной производной ∇_j компонент вектора \mathbf{u} дают формулы

$$\nabla_j u^m = \frac{\partial u^m}{\partial y_j} + u^i \Gamma_{ij}^m, \quad \nabla_j u_m = \frac{\partial u_m}{\partial y_j} - u_i \Gamma_{mj}^i. \quad (4.9)$$

Ковариантную производную ∇_j векторов \mathbf{e}_α , \mathbf{e}^β можно определить из (4.9), подставив вместо ковариантной u_α (контравариантной u^β) компоненты \mathbf{u} вектор базиса \mathbf{e}_α (кобазиса \mathbf{e}^β). Тогда в силу определения символов Кристоффеля (первая группа формул (4.3), (4.4)) получим

$$\nabla_j \mathbf{e}^m = \frac{\partial \mathbf{e}^m}{\partial y_j} + \mathbf{e}^i \Gamma_{ij}^m = 0, \quad \nabla_j \mathbf{e}_m = \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial y_j} - \mathbf{e}_i \Gamma_{mj}^i = 0, \quad (4.10)$$

т. е. ковариантные производные векторов базиса и кобазиса равны нулю

$$\nabla_j \mathbf{e}^m = 0, \quad \nabla_j \mathbf{e}_m = 0. \quad (4.11)$$

Для произвольного $\mathbf{u} \in V$ это дает

$$\begin{aligned} \nabla_j \mathbf{u} &= \nabla_j (u^m \mathbf{e}_m) = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m + u^m (\nabla_j \mathbf{e}_m) = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \\ \nabla_j \mathbf{u} &= \nabla_j (u_m \mathbf{e}^m) = \nabla_j u_m \mathbf{e}^m + u_m (\nabla_j \mathbf{e}^m) = \nabla_j u_m \mathbf{e}^m = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \end{aligned}$$

Поэтому при дифференцировании вектора $\mathbf{u} \in V$ символы ∇_j , $\frac{\partial}{\partial y_j}$ можно не различать.

Точно также не различаются эти символы и при дифференцировании скалярной функции $\varphi(M) = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$, ибо по определению

$$\nabla_j \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \quad (4.12)$$

В (4.12) мы имеем дело с индексными объектами. Какова их природа? Поскольку

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \longleftrightarrow \nabla_j \varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \nabla_i \varphi(\mathbf{x}),$$

то в соответствии с аналитическим определением вектора индексные величины (4.12) являются ковариантными компонентами некоторого вектора. Этот вектор называют *градиентом* $\varphi(M)$ (градиентом скалярного поля $\varphi(M)$) и используют обозначения $\nabla \varphi$ или $\text{grad } \varphi$:

$$\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \mathbf{e}^i = \nabla_i \varphi \mathbf{e}^i. \quad (4.13)$$

Особо отметим, что если $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$, то отображение $\text{grad} : R^3 \rightarrow V$ повышает ранг тензорного поля.

Обратимся снова к (4.5), (4.6)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u_m \mathbf{e}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m. \quad (4.14)$$

В (4.14) один и тот же вектор $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}$ можно рассматривать:

- либо как результат свертки индексной величины $\nabla_j u_\alpha$ с вектором \mathbf{e}^m ($m = \alpha$),
- либо как результат свертки индексной величины $\nabla_j u^\alpha$ с вектором \mathbf{e}_m ($m = \alpha$).

Поэтому в соответствии с тензорным критерием величины $\nabla_j u_m$ и $\nabla_j u^m$ задают ковариантные и смешанные компоненты одного и того же тензора ранга два

$$T = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \otimes \mathbf{e}^j = \nabla_j u_m (\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^j) = \nabla_j u^m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^j). \quad (4.15)$$

Итак, в (4.15) $T_{mj} = \nabla_j u_m$, $T_j^{m\cdot} = \nabla_j u^m$. В силу (2.18) (правило жонглирования индексами) имеем

$$T_j^{m\cdot} = \nabla_j u^m = g^{m\alpha} T_{\alpha j} = g^{m\alpha} \nabla_j u_\alpha.$$

С другой стороны, в силу (2.17) (опять то же правило жонглирования)

$$u^m = g^{m\alpha} u_\alpha.$$

Следовательно,

$$\nabla_j (g^{m\alpha} u_\alpha) = g^{m\alpha} \nabla_j u_\alpha.$$

Это означает, что

$$\nabla_j g^{m\alpha} = 0. \quad (4.16)$$

Аналогичные рассуждения приводят к

$$\nabla_j g_{m\alpha} = 0, \quad \nabla_j g_\alpha^m = 0. \quad (4.17)$$

Соотношения (4.16), (4.17) означают, что *ковариантная производная метрического тензора равна нулю*. Итак, (4.11), (4.16), (4.17) позволяют сделать вывод, что *при ковариантном дифференцировании \mathbf{e}_α , \mathbf{e}^α , $g_{m\alpha}$, g_α^m , $g^{m\alpha}$ следует рассматривать как постоянные*.

Что касается (4.15), то тензор T ранга два с компонентами $T_{mj} = \nabla_j u_m$ или $T_j^{m\cdot} = \nabla_j u^m$ называют *градиентом вектора \mathbf{u}* (градиентом векторного поля \mathbf{u}) и используют обозначения $\text{grad } \mathbf{u}$ или $\nabla \mathbf{u}$:

$$T = \text{grad } \mathbf{u} \equiv \nabla \mathbf{u} = \nabla_j u_m (\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^j) = \nabla_j u^m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^j) \quad (4.18)$$

Матрица $(\nabla_j u^m)$ задает матрицу тензора T в базисе \mathbf{e}_m при отображении $T : V \rightarrow V$. Как и в (4.13) отображение $\text{grad} : \mathbf{u} \rightarrow T$ повышает на единицу ранг тензорного поля.

Сказанного о ковариантном дифференцировании уже достаточно для того, чтобы формализовать нужное для наших целей понятие "дифференцирование". Пусть φ – некоторая функция с аргументом $u \in R^n$ (n -мерное евклидово пространство) и значениями $\varphi \in R^m$ (m -мерное евклидово пространство). В этом случае принято говорить о *векторном поле φ* , заданном на R^n и использовать обозначение $\varphi : R^n \rightarrow R^m$.

Говорят, что векторное поле $\varphi(u)$ дифференцируемо в точке $u \in R^n$, если существует линейный оператор L , отображающий R^n в R^m и такой, что для любого $v \in R^n$

$$\varphi(u+v) - \varphi(u) = Lv + o(v), \quad (4.19)$$

где $|o(v)|$ величина более высокого порядка малости, чем $|v|$, т.е.

$$\frac{|o(v)|}{|v|} \rightarrow 0, \quad \text{при } v \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

Отображение (линейный оператор) $L : R^n \rightarrow R^m$ называют *градиентом векторного поля* $\varphi(u)$ и используют обозначения $\text{grad } \varphi(u)$, $\nabla \varphi(u)$, $\varphi'(u)$. Отметим, что термин *отображение* полностью соответствует существу дела. Левая часть в (4.19) является элементом из R^m , а в правой части (4.19) $u \in R^n$. Поэтому с точностью до бесконечно малых элементов $o(v)$ $L : R^n \rightarrow R^m$. Из (4.20) также вытекает, что само определение L связано с метрикой в R^n . Для $R^n = V$ метрика задается посредством (2.22), (2.24).

Если оператор L из (4.19), (4.20) существует, то с точки зрения его непосредственного вычисления более приемлемым является определение L посредством равенства

$$Lv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(u + tv)|_{t=0}. \quad (4.21)$$

Как уже говорилось, введение системы координат в R^n позволяет отождествить точечное пространство $M(y_1, \dots, y_n) \in R^n$ (точнее, его часть) с n -мерным векторным евклидовым пространством $\mathbf{u} \in V$. Поэтому, определяя функцию φ на V можно считать ее функцией координат вектора. Для упрощения записи можно также считать, что декартовы координаты точки M в базисе $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ определяют контравариантные компоненты вектора $\mathbf{x} : \varphi(M) = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^1, \dots, x^n)$.

Пусть теперь в (4.19)–(4.21) $n > m = 1$. В этом случае φ – скалярная функция векторного аргумента \mathbf{x} , а $L\mathbf{v}$ – линейная вещественная функция (линейный функционал) аргумента \mathbf{v} . По теореме Рисса существует единственный вектор $\mathbf{w} \in V$ такой, что

$$L\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.22)$$

Именно этот вектор называют градиентом функции φ в точке $\mathbf{x} \in V$ ($M \in R^n$) и обозначают как $\mathbf{w} = \text{grad } \varphi(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x})$. Формула (4.21) дает

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{v} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{x})}{t} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x} + t\mathbf{v})|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x^1 + tv^1, \dots, x^n + tv^n)|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} v^i. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Итак, если $n > m = 1$, то в декартовом базисе $\nabla \varphi(\mathbf{x})$ есть вектор с компонентами $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, т. е. $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \mathbf{q}_i$. Второй член в (4.23) можно интерпретировать как производную $\varphi'(\mathbf{x})$ в направлении вектора \mathbf{v} . Последний всегда можно считать единичным. Но тогда в силу (2.23)

$$\text{grad } \varphi \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \cos(\widehat{\mathbf{w}, \mathbf{v}}).$$

Поэтому максимум производной $\varphi'(\mathbf{x})$ достигается при $\cos(\widehat{\mathbf{w}, \mathbf{v}}) = 1$, т. е. в направлении $\text{grad } \varphi$. Это направление соответствует направлению наибольшего роста функции $\varphi(M) = \varphi(x^1, \dots, x^n)$, противоположное – направлению наибольшего убывания.

Другой важный в приложениях случай – это $n = m$. Тогда мы имеем дело с векторной функцией векторного аргумента и в декартовом базисе

$$\varphi = \varphi^i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i.$$

Как нетрудно понять, теперь L – тензор ранга два и в соответствии с (4.21)

$$(L\mathbf{v})^i = \frac{\partial}{\partial t} \varphi^i(x^1 + tv^1, \dots, x^n + tv^n)|_{t=0} = \sum_j \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} v^j.$$

Поэтому тензору $L = \nabla\varphi$ в базисе \mathbf{q}_m соответствует матрица смешанных компонент

$$(L) = (L^i_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Эту матрицу часто называют матрицей Якоби системы функций $\varphi^i(\mathbf{x})$.

Еще раз отметим, что в обоих случаях: $n > m = 1$ и $n = m$ декартово описание применяется лишь для максимального упрощения записи в (4.21). Если при описании отображения $L : R^n \rightarrow R^m$ использовать естественный базис \mathbf{e}_m и кобазис \mathbf{e}^m , связанные с криволинейной системой координат y_1, \dots, y_n , то (4.21) дает

$$n > m = 1 : L = \text{grad } \varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \mathbf{e}^i, \quad \text{формула (4.13),}$$

$$n = m : L = \text{grad } \varphi = \nabla_j \varphi^i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j), \quad \text{формула (4.18),}$$

где ∇_j – символ ковариантного дифференцирования (см. (4.5), (4.6), (4.14)). И, наконец, вместо (4.24) будем иметь

$$(L) = (L^i_j) = \begin{pmatrix} \nabla_1 \varphi^1 & \cdots & \nabla_n \varphi^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \nabla_1 \varphi^n & \cdots & \nabla_n \varphi^n \end{pmatrix}$$

Как это следует из (4.9), ковариантное дифференцирование компонент вектора \mathbf{u} связано с нахождением символов Кристоффеля второго рода. Формально эти символы заданы соотношениями (4.3), которые можно положить в основу при их вычислении. Однако существует более простой способ определения Γ^m_{ij} , непосредственно через компоненты метрического тензора G .

Прежде всего отметим, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам. Действительно,

$$\Gamma^m_{ij} = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \right) = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_j} \right) = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial y_i} = \Gamma^m_{ji}. \quad (4.25)$$

По определению $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ и поэтому

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_i.$$

В силу (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_j &= \Gamma^m_{i\alpha} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma^m_{i\alpha} g_{mj} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_i &= \Gamma^m_{j\alpha} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i = \Gamma^m_{j\alpha} g_{mi}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_\alpha} = \Gamma^m_{i\alpha} g_{mj} + \Gamma^m_{j\alpha} g_{mi}. \quad (4.26)$$

Совершенно аналогично

$$\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial y_\alpha} = \Gamma^m_{\alpha i} g_{jm} + \Gamma^m_{ji} g_{m\alpha}, \quad \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial y_\alpha} = \Gamma^m_{\alpha j} g_{im} + \Gamma^m_{ij} g_{\alpha m}. \quad (4.27)$$

Поскольку $g_{m\alpha} = g_{\alpha m}$, то (4.25)–(4.27) дают

$$2\Gamma_{ij}^m g_{m\alpha} = \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial y_i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial y_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_\alpha}. \quad (4.28)$$

Следует теперь свернуть (4.28) с $\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}$ и учесть (2.19): $g_{\alpha m}g^{\alpha\beta} = \delta_m^\beta$, чтобы получить нужный результат

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}g^{\alpha m} \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial y_i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial y_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_\alpha} \right). \quad (4.29)$$

Для ортогональной криволинейной системы координат y_1, \dots, y_n существенно упрощаются преобразования, приводящие к (4.29), так что в этом случае будем иметь (по i, j не суммировать)

$$\Gamma_{jj}^j = \frac{1}{2}g^{jj} \frac{\partial g_{jj}}{\partial y_j}, \quad \Gamma_{ji}^j = \frac{1}{2}g^{jj} \frac{\partial g_{jj}}{\partial y_i}, \quad \Gamma_{ii}^j = -\frac{1}{2}g^{jj} \frac{\partial g_{ii}}{\partial y_j}. \quad (4.30)$$

В заключение отметим, что индексные величины Γ_{ij}^m (символы Кристоффеля) не являются тензорными компонентами. Действительно, в цилиндрической системе координат (ортогональная система):

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos y_2, & x_2 &= y_1 \sin y_2, & x_3 &= y_3, \\ g^{11} &= 1, & g^{22} &= \frac{1}{y_1^2}, & g^{33} &= 1, & g^{im} &= 0, & i &\neq m, \\ g_{11} &= 1, & g_{22} &= y_1^2, & g_{33} &= 1, & g_{im} &= 0, & i &\neq m \end{aligned} \quad (4.31)$$

существуют отличные от нуля символы Кристоффеля. Их легко вычислить с помощью (4.30) – это $\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{y_1}$, $\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{y_1}$. С другой стороны, в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 все символы Кристоффеля равны нулю. Согласно определению (2.1) тензорные компоненты подобным свойством обладать не могут.

Итак, задание метрического тензора G полностью определяет $\nabla_j u^m, \nabla_j u_m$. Очевидно, что

$$\nabla_j(\alpha u^m + \beta v^m) = \alpha \nabla_j u^m + \beta \nabla_j v^m, \quad \alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

Отметим также, что правило ковариантного дифференцирования произведения $\nabla_j(v^i u^m)$ такое же, как и при обычном дифференцировании $\frac{\partial}{\partial y_j}(v^i u^m)$. Действительно, индексные величины $v^i u^m$ можно рассматривать (см. (2.4)) в качестве контравариантных компонент некоторого тензора ранга два: $T = T^{im}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m)$. Тогда (сравни с (4.1), (4.2))

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y_j} &= \frac{\partial T^{im}}{\partial y_j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) + T^{im} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} \otimes \mathbf{e}_m \right) + T^{im} \left(\mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial y_j} \right) = \\ &= \frac{\partial T^{im}}{\partial y_j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) + T^{im} \Gamma_{ij}^\beta(\mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_m) + T^{im} \Gamma_{mj}^\beta(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_\beta) = \\ &= \frac{\partial T^{im}}{\partial y_j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) + T^{\beta m} \Gamma_{\beta j}^i(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) + T^{i\beta} \Gamma_{\beta j}^m(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) = \\ &= \left(\frac{\partial T^{im}}{\partial y_j} + T^{\beta m} \Gamma_{\beta j}^i + T^{i\beta} \Gamma_{\beta j}^m \right) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m). \end{aligned} \quad (4.32)$$

С одной стороны, (4.32) приводит к определению ковариантной производной контравариантных компонент тензора ранга два

$$\frac{\partial T}{\partial y_j} = \left(\frac{\partial T^{im}}{\partial y_j} + T^{\beta m} \Gamma_{\beta j}^i + T^{i\beta} \Gamma_{\beta j}^m \right) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) = \nabla_j T^{im} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m), \quad (4.33)$$

а с другой стороны, задает правило ковариантного дифференцирования, произведения, ибо в силу $T^{im} = v^i u^m$

$$\begin{aligned} \nabla_j (v^i u^m) &= \frac{\partial}{\partial y_j} (v^i u^m) + v^\beta u^m \Gamma_{\beta j}^i + v^i u^\beta \Gamma_{\beta j}^m = \\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial y_j} + v^\beta \Gamma_{\beta j}^i \right) u^m + \left(\frac{\partial v^m}{\partial y_j} + v^\beta \Gamma_{\beta j}^m \right) v^i = u^m \nabla_j v^i + v^i \nabla_j u^m \end{aligned} \quad (4.34)$$

Свойство симметрии символов Кристоффеля по нижним индексам (4.25) предполагает, что

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_j \partial y_i}. \quad (4.35)$$

Как известно из анализа, законность изменения порядка дифференцирования в (4.35) обеспечивается непрерывностью смешанных производных. Как обстоит дело при ковариантном дифференцировании? Если воспользоваться (4.9), то можно получить

$$\nabla_j \nabla_i u^m - \nabla_i \nabla_j u^m = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha i}^m}{\partial y_j} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha j}^m}{\partial y_i} + \Gamma_{\beta j}^m \Gamma_{\alpha i}^\beta - \Gamma_{\beta i}^m \Gamma_{\alpha j}^\beta \right) u^\alpha. \quad (4.36)$$

Из аналитического определения тензора (2.1) вытекает, что левая часть в (4.36) задает компоненты тензора ранга три: $T_{ij}^{\dots m} = (\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) u^m$. Эти тензорные компоненты получены в результате свертывания ($\alpha = \gamma$) индексных величин

$$R_{ij\gamma}^{\dots m} = \frac{\partial \Gamma_{\gamma i}^m}{\partial y_j} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma j}^m}{\partial y_i} + \Gamma_{\beta j}^m \Gamma_{\gamma i}^\beta - \Gamma_{\beta i}^m \Gamma_{\gamma j}^\beta \quad (4.37)$$

с компонентами вектора u^α . На основании тензорного критерия заключаем, что величины $R_{ij\gamma}^{\dots m}$ являются компонентами тензора четвертого ранга. Его называют *тензором Римана-Кристоффеля*. Таким образом вопрос о законности изменения порядка ковариантного дифференцирования связан с вопросом об условиях обращения в нуль тензора Римана-Кристоффеля.

Термин "евклидово пространство" употреблялся уже не один раз. Первоначально речь шла об арифметизации точечного пространства посредством введения координат и отождествлении его с векторным пространством $V(\mathbf{u})$:

$$R^n(M) \longleftrightarrow R^n(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow R^n(y_1, \dots, y_n) \longleftrightarrow V(\mathbf{u}).$$

Затем речь шла о метрике пространства $V(\mathbf{u})$. Введенная с помощью фундаментального тензора G метрика (2.24) зависит от точки M , ибо $G = G(M)$. Однако определение естественного базиса (кобазиса) основано на предположении о существовании системы координат, в которой G не зависит от M . Таковой для нас являлась декартова прямоугольная система координат x_1, \dots, x_n . Поэтому, говоря об евклидовом пространстве, мы постулируем существование в этом пространстве метрического тензора G , для которого $g_{im} = \delta_{im}$. Для такого пространства в силу (4.29), (4.37) тензор Римана-Кристоффеля равен нулю.

Завершая рассмотрение свойств ковариантного дифференцирования, введем правила вычисления градиента от произведения функций векторного аргумента со значениями различных типов: φf , $\varphi \mathbf{f}$, $\varphi \cdot \mathbf{f}$. Итак,

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi f) &= f\nabla\varphi + \varphi\nabla f, & \varphi &= \varphi(\mathbf{y}), & f &= f(\mathbf{y}), \\ \nabla(\varphi \mathbf{f}) &= \mathbf{f} \otimes \nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{f}, & \varphi &= \varphi(\mathbf{y}), & \mathbf{f} &= f(\mathbf{y}), \\ \nabla(\varphi \cdot \mathbf{f}) &= [\nabla\varphi]^* \mathbf{f} + [\nabla\mathbf{f}]^* \varphi, & \varphi &= \varphi(\mathbf{y}), & \mathbf{f} &= f(\mathbf{y}).\end{aligned}\quad (4.38)$$

Наряду с операцией градиент: $\text{grad}(\cdot) \equiv \nabla(\cdot)$ введем в рассмотрение операцию *дивергенция*: $\text{div}(\cdot)$, которая также связана с ковариантным дифференцированием. Если $\varphi(\mathbf{y})$ – векторная функция векторного аргумента, то по определению

$$\text{div} \varphi = \text{tr}(\nabla\varphi) = \nabla_m \varphi^m. \quad (4.39)$$

В (4.39) $\nabla_m \varphi^m$ – скаляр, так что операция div понижает ранг векторного поля. Дивергенция тензорного поля T ранга два определяется следующим образом:

$$(\text{div} T) \cdot \mathbf{a} = \text{div}(T^* \mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in V, \quad (4.40)$$

где \mathbf{a} – произвольный, но постоянный вектор. В правой части (4.40) $T^* \mathbf{a}$ – вектор, операция div от которого определена в (4.39). Зададим тензор T контравариантными компонентами T^{im} . Тогда

$$(T^* \mathbf{a})^i = \sum_{m=1}^n T^{mi} a_m.$$

Поэтому

$$\text{div}(T^* \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \nabla_i \sum_{m=1}^n T^{mi} a_m = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^n \nabla_i T^{mi} a_m.$$

Учитывая теперь определение (4.40) и произвольность вектора \mathbf{a} в этом определении, получаем

$$(\text{div} T)^m = \sum_{i=1}^n \nabla_i T^{mi}, \quad \text{div} T = \left(\sum_{i=1}^n \nabla_i T^{mi} \right) \mathbf{e}_m. \quad (4.41)$$

Итак, $\text{div} T$ – вектор, контравариантные компоненты которого заданы в (4.41). Для вычисления $\nabla_i T^{mi}$ следует использовать формулу (4.32), так что

$$\nabla_i T^{mi} = \frac{\partial T^{mi}}{\partial y_i} + T^{\beta i} \Gamma_{\beta i}^m + T^{m\beta} \Gamma_{\beta i}^i. \quad (4.42)$$

Отметим, что как и в случае (4.39), операция $\text{div} T$ понижает ранг тензорного поля. Отметим также, что если тензор T в (4.40) задать ковариантными компонентами T_{ij} , то вместо (4.41) будем иметь

$$(\text{div} T)_j = \sum_{i=1}^n \nabla_i T_{ji}, \quad \text{div} T = \left(\sum_{i=1}^n \nabla_i T_{ji} \right) \mathbf{e}^j. \quad (4.43)$$

Что же касается фактического вычисления $\nabla_i T_{ji}$, то все сведется к (4.42), ибо в соответствии с (2.18) и (4.17)

$$T_{ji} = g_{\alpha j} g_{\beta i} T^{\alpha\beta}, \quad \nabla_i T_{ji} = g_{\alpha j} g_{\beta i} \nabla_i T^{\alpha\beta}.$$

Приведем далее правила вычисления дивергенции от произведения функций векторного аргумента со значениями различных типов. Если $\varphi = \varphi(\mathbf{y})$, а $\mathbf{f} = f(\mathbf{y})$, то

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{f}) = \mathbf{f} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (4.44)$$

Если же $T = T(\mathbf{y})$, а $\mathbf{f} = f(\mathbf{y})$, то

$$\operatorname{div}(T\mathbf{f}) = (\operatorname{div} T^*) \cdot \mathbf{f} + \operatorname{tr}(T \operatorname{grad} \mathbf{f}). \quad (4.45)$$

Для симметричного тензора $T = T^*$ обычно используется иная форма записи (4.45). По определению, $\operatorname{grad} \mathbf{f}$ является тензором с компонентами $\nabla_j f^i$. Но

$$\nabla_j f^i = \frac{1}{2}(\nabla_j f^i + \nabla_i f^j) + \frac{1}{2}(\nabla_j f^i - \nabla_i f^j) = L_j^i + M_i^j, \quad (4.46)$$

что соответствует стандартному представлению (3.27) произвольного тензора в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров

$$\operatorname{grad} \mathbf{f} = L + M, \quad L = L^*, \quad M = -M^*.$$

Тогда в силу (3.33), (3.34)

$$\operatorname{tr}(T \operatorname{grad} \mathbf{f}) = \operatorname{tr}(TL) = T \cdot L.$$

Поэтому для $T = T^*$ правая часть (4.45) записывается в виде суммы двух скалярных произведений и

$$\operatorname{div}(T\mathbf{f}) = \operatorname{div} T \cdot \mathbf{f} + T \cdot L, \quad (4.47)$$

где L – симметричная часть тензора $\operatorname{grad} \mathbf{f}$. В случае прямоугольной декартовой системы координат (4.44) и (4.47) сводятся к хорошо известным из анализа формулам дифференцирования произведения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi f^j) &= f^j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi \frac{\partial f^j}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ji} f^i) &= f^i \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + T_{ji} \frac{\partial f^i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

В случае $n = 3$ кососимметричный тензор $T = -T^*$, где $T = 2M$, а M определен в (4.46) порождает новый векторный объект: $\operatorname{rot} \mathbf{f}$, для которого принята следующая символическая форма записи

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ f^1 & f^2 & f^3 \end{vmatrix} \quad (4.48)$$

Раскрывая определитель в (4.48), получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = (\nabla_2 f^3 - \nabla_3 f^2) \mathbf{e}_1 + (\nabla_3 f^1 - \nabla_1 f^3) \mathbf{e}_2 + (\nabla_1 f^2 - \nabla_2 f^1) \mathbf{e}_3 = v^i \mathbf{e}_i. \quad (4.49)$$

Сразу же отметим, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \quad (4.50)$$

Действительно, поскольку пространство R^3 является евклидовым, то в силу (4.49)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla_i v^i = \nabla_1(\nabla_2 f^3 - \nabla_3 f^2) + \nabla_2(\nabla_3 f^1 - \nabla_1 f^3) + \nabla_3(\nabla_1 f^2 - \nabla_2 f^1) =$$

$$= (\nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1) f^3 + (\nabla_3 \nabla_1 - \nabla_1 \nabla_3) f^2 + (\nabla_2 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_2) f^1 = 0.$$

Далее, градиент скалярного поля $\varphi(\mathbf{y})$ задается ковариантными компонентами $\nabla_j = \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}$ (см. (4.12)). Поэтому при определении векторного объекта $\text{rot grad } \varphi$ следует в (4.48) строку из векторов базиса \mathbf{e}_i заменить на строку из векторов кобазиса \mathbf{e}^i , а строку f^1, f^2, f^3 следует заменить на строку $\nabla_1 \varphi, \nabla_2 \varphi, \nabla_3 \varphi$. Теперь, чтобы убедиться в справедливости второго из соотношений (4.50), остается раскрыть преобразованный указанным образом определитель (4.48). Тогда $\text{rot grad } \varphi = (\nabla_2 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_2) \varphi \mathbf{e}^1 + (\nabla_1 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_1) \varphi \mathbf{e}^2 + (\nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1) \varphi \mathbf{e}^3 = 0$.

С помощью дифференциальных операций первого порядка: $\text{grad } (\cdot)$, $\text{div } (\cdot)$, $\text{rot } (\cdot)$ можно определить дифференциальные операции более высокого порядка. Например, если $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ – скалярная функция векторного аргумента, то в декартовой системе координат

$$\text{div grad } \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varphi \equiv -\Delta \varphi. \quad (4.51)$$

Оператор $-\text{div grad} : R^1 \rightarrow R^1$ в (4.51) называют *оператором Лапласа*. В декартовой прямоугольной системе координат этот оператор является простейшим примером дифференциального *эллиптического оператора второго порядка*:

$$\Delta \equiv -\text{div grad} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Рассмотрим далее более общий случай. Пусть K – симметричный $K = K^*$, положительно определенный $K \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ тензор ранга два, заданный в декартовом базисе матрицей $(K) = (k_{ij})$. По определению, $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ – вектор с ковариантными компонентами $u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$. Если $\mathbf{w} = K \mathbf{u}$, то $w_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j$. Поэтому

$$\text{div } \mathbf{w} = \text{div } K \mathbf{u} = \text{div } K \text{grad } \varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \equiv -A \varphi. \quad (4.52)$$

Условия $K = K^* > 0$ позволяют говорить о том, что в (4.51), как и в (4.52) определен дифференциальный *эллиптический оператор второго порядка*:

$$A = -\text{div } K \text{grad} = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

В только что рассмотренных простейших примерах операторы Δ, A заданы на элементах $\varphi(M) \in H$. Под H можно понимать линейное пространство скалярных функций векторного аргумента $\varphi(M) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, определенных в ограниченной области $D, M \in D$ евклидова пространства R^n с границей S . Поскольку $\Delta : H \rightarrow H, A : H \rightarrow H$, то формально могут быть поставлены задачи о нахождении решений операторных уравнений

$$\text{div grad } \varphi = f \in H, \quad \text{div } K \text{grad } \varphi = g \in H, \quad M \in D. \quad (4.53)$$

Бескоординатная форма записи операторов Δ, A позволяет говорить о *факторизованной структуре* операторных уравнений (4.53).

И в заключение этого параграфа остановимся на некоторых интегральных операциях тензорного анализа. В их основе лежит хорошо известная формула Гаусса-Остроградского

$$\int_D \frac{\partial \varphi_j(M)}{\partial y_i} dV = \int_S \varphi_j(M) \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{y_i}) dS. \quad (4.54)$$

Здесь $D \subset R^n$ – некоторая область в R^n с достаточно гладкой границей S , \mathbf{n} – орт внешней нормали к S , $\varphi_j(M)$ – непрерывно дифференцируемая скалярная функция векторного аргумента. В качестве почти очевидных следствий из (4.54) имеем

$$\int_D \operatorname{rot} \mathbf{v} dV = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) dS, \quad (4.55)$$

а также

$$\int_D \operatorname{grad} \varphi dV = \int_S \mathbf{n} \varphi dS, \quad (4.56)$$

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (4.57)$$

В дальнейшем нам понадобится тензорный аналог интегрального соотношения (4.57). Пусть \mathbf{a} – произвольный постоянный вектор и T – непрерывно дифференцируемая тензорная функция векторного аргумента. Из (4.57) и определения (4.40) получаем

$$\int_D (\operatorname{div} T) \cdot \mathbf{a} dV = \int_D \operatorname{div} (T^* \mathbf{a}) dV = \int_S T^* \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{a} \cdot T \mathbf{n} dS.$$

Поэтому в силу произвольности \mathbf{a}

$$\int_D \operatorname{div} T dV = \int_S T \mathbf{n} dV. \quad (4.58)$$

Другая группа следствий из (4.54) связана с возможностью такого определения дифференциальных операций первого порядка: $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{u}$, $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ и т.д., которое не зависит от конкретного выбора системы координат. Точке $M \in D$ поставим в соответствие некоторый ”малый объем” $D(M) \subset D$, границей которого является замкнутая поверхность $S(M)$ и $M \in D(M)$. Применим теперь к (4.56) интегральную теорему о среднем

$$(\operatorname{grad} \varphi(M)) D(M) = \int_{S(M)} \mathbf{n} \varphi dS + \varepsilon \cdot D(M).$$

Из $D(M) \rightarrow 0$ следует $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому

$$\operatorname{grad} \varphi(M) = \lim_{D(M) \rightarrow 0} (D(M))^{-1} \int_{S(M)} \mathbf{n} \varphi dS. \quad (4.59)$$

Совершенно аналогично

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(M) = \lim_{D(M) \rightarrow 0} (D(M))^{-1} \int_{S(M)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS, \quad (4.60)$$

$$\operatorname{div} T(M) = \lim_{D(M) \rightarrow 0} (D(M))^{-1} \int_{S(M)} T \mathbf{n} dS, \quad (4.61)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(M) = \lim_{D(M) \rightarrow 0} (D(M))^{-1} \int_{S(M)} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) dS. \quad (4.62)$$

И, наконец, особо отметим интегральные следствия соотношений (4.44) и (4.47):

$$\int_D \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} dV + \int_D (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi) dV = \int_S \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS, \quad (4.63)$$

$$\int_D \operatorname{div} T \cdot \mathbf{u} dV + \int_D T \cdot L dV = \int_S \mathbf{n} \cdot T \mathbf{u} dS, \quad (4.64)$$

В (4.64) L – симметричная часть тензора $\operatorname{grad} \mathbf{u}$, т.е. $(L_j^i) = \frac{1}{2}(\nabla_j u^i + \nabla_i u^j)$.

§ 5. Сплошная среда. Закон сохранения массы.

Говоря о *сплошной* среде, мы интуитивно представляем, что речь идет о некоторой части *пространства*, в которую целиком, т.е. без пустот, помещено некоторое тело (твердое, жидкое, газообразное и т.д.). ”Природа не терпит пустоты”, поэтому ”пустота” допускается лишь как существование другой сплошной среды, которая отлична от рассматриваемой. С другой стороны, признавая за объективную реальность атомы и молекулы, мы, тем самым, признаем и приближенность представления о сплошной среде.

Все дело в степени приближения. Пусть для некоторой среды (назовем ее первой) характерное расстояние между частицами среды (атомы, молекулы) есть l_1 , а для второй среды – l_2 . Пусть также характерный масштаб (размер) изучаемого явления для первой среды есть L_1 , а для второй среды – L_2 . Если $l_1/L_1 \simeq l_2/L_2$, то следует признать либо сплошность обеих сред, либо – нет.

Коль скоро сплошная среда помещена в некоторое пространство, то под последним можно понимать точечное евклидово пространство R^3 . Поскольку *движение* сплошной среды всегда определено лишь по отношению к некоторой системе отсчета, то в R^3 (или в некоторой интересующей нас части R^3) будем считать заданной криволинейную систему координат y_1, y_2, y_3 . Будем также считать, что существует возможность измерять время t , т.е. определять продолжительность каждого события, связанного с изучаемой сплошной средой.

Отдельные части рассматриваемой среды могут под действием ”внешних или внутренних сил” перемещаться друг относительно друга, так что сплошной среде изначально предписывается свойство *деформируемости*. Пусть некоторая материальная частица в начальный момент времени t_0 имеет координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 , а в текущий момент времени t – координаты y_1, y_2, y_3 . По определению, переход $\xi \rightarrow y$ приводит к деформации сплошной среды, каждая точка которой получает перемещение, определяемое вектором $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u^i \mathbf{e}_i$. Следовательно, в момент времени t

$$y_i = \xi_i + u_i(\boldsymbol{\xi}, t). \quad (5.1)$$

Обычно предполагается, что для любого $t > t_0$ компоненты вектора перемещений \mathbf{u} являются непрерывно дифференцируемыми функциями координат ξ_i .

В изучаемых процессах искомыми функциями будут являться некоторые параметры сплошной среды, такие, например, как скорость, температура и т.д. При *описании процесса по Лагранжу* мы интересуемся изменением параметров среды каждой индивидуальной материальной частицы: независимыми переменными являются t, ξ_1, ξ_2, ξ_3 . При *описании Эйлера* мы интересуемся изменением параметров среды в фиксированной точке пространства: независимыми переменными являются t, y_1, y_2, y_3 . Следует предположить, что соотношения (5.1) между y_i и ξ_i являются взаимнооднозначными, так что каждой материальной частице до деформации соответствует только одна материальная частица в деформированном состоянии. Это обеспечивает равноправность обоих подходов при изучении сплошной среды.

Движение j -ой материальной частицы сплошной среды считается заданным (относительно выбранной системы координат), если известны координаты этой частицы как функции времени t : $y_{1j}(t), y_{2j}(t), y_{3j}(t)$. Формально, движение сплошной среды можно описать следующим образом

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{y}_j}{dt^2} = \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{y}_j(t_0) = \boldsymbol{\xi}_j, \quad \frac{d\mathbf{y}_j}{dt}(t_0) = \mathbf{v}_{j0}. \quad (5.2)$$

Здесь m_j – масса j -ой частицы, которая содержится в изучаемом объеме V , \mathbf{f}_j – вектор заданных сил, а векторы $\boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{v}_{j0}$ определяют положение и скорость j -ой частицы в начальный момент времени t_0 . К сожалению, число "реальных" материальных частиц в сколько-нибудь реальном объеме V слишком велико. Сложности возникают и при задании \mathbf{f}_j , поскольку следует учитывать взаимодействие "соседних" частиц с рассматриваемой.

Обычно предполагается, что в каждой точке $M \in V_* \subseteq V$ параметры (макрохарактеристики) сплошной среды можно получить с помощью операции осреднения по объему V_* . Материальной j -ой частице из V_* изначально приписывается масса m_j , скорость \mathbf{v}_j и внутренняя энергия U_j . С их помощью определяются величины

$$\tilde{m} = \sum_j m_j, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \sum_j \tilde{m} \mathbf{v}_j \text{ – импульс.}$$

Далее вычисляются *средняя плотность* $\rho_* : \rho_* V_* = \tilde{m}$, *средняя скорость* $\mathbf{v}_* : \mathbf{v}_* \tilde{m} = \tilde{\mathbf{k}}$, полная внутренняя энергия \tilde{U} :

$$\tilde{U} = \sum_j \left(\frac{1}{2} m_j |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_*|^2 + U_j \right)$$

и *средняя внутренняя энергия* $U_* : U_* V_* = \tilde{U}$. Макрохарактеристики объема V : m – масса, \mathbf{k} – импульс, E – полная энергия определяются через средние величины

$$m = V \rho_* \quad \mathbf{k} = V \rho_* \mathbf{v}_*, \quad E = V \left(\frac{1}{2} \rho_* |\mathbf{v}_*|^2 + U_* \right),$$

а предположение о существовании при $V \rightarrow 0$ пределов

$$\rho = \lim \rho_*, \quad \mathbf{v} = \lim \mathbf{v}_*, \quad U = \lim U_* \quad (5.3)$$

позволяет приписать каждой точке $M \in V$ предельные средние в качестве параметров сплошной среды.

Математическую модель какого-либо физического явления будем связывать с описанием изменения параметров сплошной среды (5.3) в результате

внешних и внутренних воздействий на рассматриваемый объем V . Для изучаемых физических явлений связь между параметрами сплошной среды задают *законы сохранения* (массы, импульса, момента импульса, полной энергии), определяющие соотношения и уравнения состояния. Если не оговорено противное, то в дальнейшем используется эйлерово описание изучаемых процессов и декартова прямоугольная система координат. Эйлерово (пространственное) описание процессов характерно для задач, в которых для всех $t > t_0$ *фиксирована* пространственная область изменения параметров в изучаемой задаче. Таким образом, при описании используются неизменные пространственные координаты, а параметры сплошной среды, как уже говорилось, рассматриваются как функции точки $M(x_1, x_2, x_3) \in V$ и времени t .

Пусть $D \subset V$ и S – ”достаточно гладкая” граница области D . Изменение массы вещества в объеме D за время $\Delta t = t_2 - t_1$ есть

$$J_1 = \int_D \rho(M, t_2) dV - \int_D \rho(M, t_1) dV = \int_D \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt.$$

С другой стороны, это изменение должно равняться количеству вещества, протекающему за то же время Δt через границу S внутрь (изнутри) области D , т.е.

$$J_2 = - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt.$$

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к S . Очевидно, что $J_1 = J_2$ и поэтому

$$\int_D \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt = 0. \quad (5.4)$$

Второй член в (5.4) преобразуем с помощью формулы Гаусса-Остроградского (4.57). Тогда

$$\int_D \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_D \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV dt = 0. \quad (5.5)$$

В особых комментариях дальнейшие преобразования по-видимому не нужны, ибо законность (обоснованность) этих и предыдущих преобразований очевидно предполагает соответствующую гладкость подинтегральных выражений в (5.4)–(5.5), а также и границы S . В силу произвольности D из (5.5) имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV dt = 0 \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (5.6)$$

Итак, нами записан *закон сохранения массы* в интегральной (5.4) и дифференциальной (5.6) формах.

Попытаемся сразу же применить этот закон для построения математической модели какой-нибудь конкретной задачи. Обратимся, например, к задаче *фильтрации*. Под фильтрацией понимают движение жидкости (газа) в пористой среде. Среда считается пористой, если она содержит значительное число пустот, размеры которых малы по сравнению с характерными размерами

рассматриваемой среды. Количественной характеристикой пористости служит отношение объема пор к общему объему: $m = V_{\text{пор.}}/V_{\text{общ.}}$. Таким образом, пористость m – величина безразмерная.

Учет пористости очевидным образом приводит к тому, что *уравнение неразрывности* (5.6) для сплошного потока однородной жидкости (газа) примет вид

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0. \quad (5.7)$$

В одно уравнение (5.7) входят несколько подлежащих определению величин: ρ , \mathbf{v} , так что математическая модель (5.7) не является замкнутой. Обычный способ замыкания модели (5.7) является достаточно типичным, чтобы быть здесь упомянутым. Предполагается, что для однородной фильтрующейся фазы справедлив *экспериментально установленный закон Дарси*:

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad}p. \quad (5.8)$$

Здесь p – давление, μ – динамическая вязкость, k – проницаемость, т.е. проводимость пористой среды по отношению к данной фильтрующейся фазе. Проницаемость k обратно пропорциональна сопротивлению, которое испытывает данная жидкость (газ) при течении сквозь данную пористую среду.

Скалярный закон сохранения массы (5.7) и векторное определяющее соотношение (5.8) связывают пять неизвестных параметров: ρ , p и три компоненты вектора скорости \mathbf{v} . Число уравнений меньше числа определяемых параметров: математическая модель (5.7), (5.8) опять не является замкнутой. Если считать, что рассматриваемый процесс не зависит от температуры (изотермическая фильтрация), то система уравнений (5.7), (5.8) замыкается *уравнением состояния*

$$p = p(\rho). \quad (5.9)$$

Характерным для рассмотренной замкнутой математической модели (5.7)–(5.9) является следующее. Наряду с ”точным” законом сохранения массы (5.7) эта модель содержит и приближенные, экспериментально установленные соотношения (5.8), (5.9). Но тем самым устанавливается и область применимости модели. Она связана с областью изменения параметров ρ , p , \mathbf{v} , для которой с той или иной точностью справедлив как закон Дарси (5.8), так и уравнение состояния (5.9).

Только что изложенная схема замыкания модели (5.7) может считаться удовлетворительной лишь в первом приближении. Дело в том, что закон Дарси (5.8) является, вообще говоря, следствием *закона сохранения импульса* (о нем речь впереди). Кроме того, не может быть произвольным уравнение состояния (5.9), поскольку должны выполняться некоторые дополнительные (*термодинамические*) условия на функцию $p(\rho)$. Последнее особенно важно, поскольку из натуральных экспериментов эта функция известна лишь для дискретного набора значений ρ_i .

Существенное упрощение замкнутой модели (5.7)–(5.9) может быть получено в предположении о *несжимаемости* фильтрующейся фазы. В этом случае рассматриваемый процесс следует считать *стационарным* и вместо (5.7)–(5.9) будем иметь

$$\operatorname{div}\frac{k}{\mu}\operatorname{grad}p = 0, \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad}p. \quad (5.10)$$

Как уже отмечалось, при эйлеровом описании фиксирована пространственная область изменения искомых параметров изучаемой сплошной среды. В данном случае в конкретной пространственной области D с границей S давление $p(M)$, $M \in D$ определяется как решение первого уравнения (5.10), затем $\mathbf{v}(M)$ находится из второго уравнения (5.10). Искомое решение $p(M)$ следует подчинить какому-либо из нижеприведенных краевых условий:

$$\begin{aligned} \text{а)} & p(N) = \varphi(N), \quad N \in S; \\ \text{б)} & v^m(N)n_m(N) = \psi(N), \quad N \in S; \\ \text{в)} & S = S_1 + S_2; \quad p(N) = \varphi(N), \quad N \in S_1; \quad v^m(N)n_m(N) = \psi(N), \quad N \in S_2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тем самым для давления $p(M)$ сформулирована *краевая задача* (5.10), (5.11). Краевые условия (5.11) допускают простое физическое истолкование. Случай (5.11а) соответствует заданию на границе S давления, а случай (5.11б) – заданию расхода фильтрующейся фазы.

Итак, для конкретного физического процесса построена замкнутая математическая модель (5.10), (5.11). Однако прежде чем использовать какой-либо метод фактического нахождения искомых параметров модели (аналитический, численный) следует убедиться, что краевая задача (5.10), (5.11) поставлена *корректно*. Безотносительно к конкретному предмету исследования, корректность той или иной задачи обычно предполагает, что решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Изучение этих вопросов составляет один из важнейших разделов *математической физики* и здесь, безусловно, требуется отдельное изложение.

Мы же сделаем лишь несколько замечаний относительно возникающей из (5.10), (5.11) краевой задачи для *эллиптического уравнения*

$$\operatorname{div} \frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p = 0. \quad (5.12)$$

Из (5.10), (5.12) и формулы Гаусса-Остроградского (4.57) вытекает, что

$$0 = \int_D \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS.$$

Поэтому в задаче (5.11б), (5.12) функция $\psi(N)$ не может задаваться произвольно, а необходимо должна удовлетворять условию

$$\int_S \psi(N) dS = 0. \quad (5.13)$$

Сразу и отметим, что если в рассматриваемой области D заданы источники (стоки) фильтрующейся фазы $f(M)$, то вместо (5.12) будем иметь

$$\operatorname{div} \frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p = f(M), \quad (5.14)$$

а для краевой задачи (5.11б), (5.14) вместо (5.13) получим

$$\int_D f(M) dV = \int_S \psi(N) dS. \quad (5.15)$$

Условия (5.13), (5.15) имеют простой физический смысл: для стационарного процесса фильтрации в замкнутой области D сумма внутренних источников (стоков) фильтрующей фазы равна расходу этой фазы через границу S .

Отметим также, что в предположении о разрешимости краевой задачи (5.11), (5.12) или (5.11), (5.14) достаточно простым является вопрос о единственности. Действительно, если p_1, p_2 какие-либо различные решения одной и той же задачи, то $\tilde{p} = p_1 - p_2$ удовлетворяет уравнению (5.12) с *однородными* краевыми условиями (5.11). Но тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \tilde{p} \operatorname{div} \frac{k}{\mu} \operatorname{grad} \tilde{p} dV = \sum_i \int_D \tilde{p} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \right) dV = \\ &= - \sum_i \int_D \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \right)^2 dV, \quad \frac{k}{\mu} > 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Теперь в случае краевых условий (5.11а) (задача Дирихле) из (5.16) получаем $\tilde{p} = 0$. Если в (5.11в) $\operatorname{mes} S_1 \neq 0$ (смешанная краевая задача), то (5.16) снова дает $\tilde{p} = 0$. Для краевых условий (5.11б) (задача Неймана) выполнение (5.16) возможно и при $\tilde{p} = \operatorname{const} \neq 0$. Поэтому решение краевой задачи Неймана (5.11б), (5.12) или (5.11б), (5.14) не является единственным, а определяется с точностью до произвольной постоянной. Для выделения единственного решения разрешимой задачи Неймана достаточно либо указать уровень отсчета давления: в некоторой точке $M_0 \in \bar{D}$ задать $p(M_0)$, либо указать функциональное пространство, в котором искомое решение единственно, например,

$$\int_D p dV = 0 \longleftrightarrow (p, 1)_D = 0. \quad (5.17)$$

Что касается условия (5.17), то оно связано с ортогональным разложением (3.20) соответствующего функционального пространства, порождаемого линейным оператором $A = -\operatorname{div}(k/\mu) \operatorname{grad}$ и означает, что $p \in \ker A$.

Снова вернемся к закону сохранения массы и на его примере более подробно остановимся на различиях при эйлеровом и лагранжевом описании изменения параметров сплошной среды. Вывод уравнения неразрывности (5.6) основан, по существу, на предположении (аксиоме):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (5.18)$$

При эйлеровом описании в (5.18) $V = D$ – фиксированный объем в R^3 , поэтому $\partial/\partial t$ можно внести под знак интеграла. В дальнейшем следует учесть, что изменение массы в объеме D за время Δt в точности равно количеству вещества, протекающему за то же время Δt через границу S . Именно такой подход реализован при выводе (5.6).

При лагранжевом описании мы фиксируем некоторый объем V_0 при $t = t_0$ – *начальное* состояние и следим за изменением параметров индивидуальных частиц в этом объеме для $t > t_0$. Тогда $V_0 \longrightarrow V$ и для *текущего* (актуального) состояния $V = V(t)$.

Получим закон сохранения массы (уравнение неразрывности) в лагранжевом описании. Пусть в начальном состоянии $t = t_0$ материальные частицы

$\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, начальная плотность которых есть $\rho_0(\xi)$ заполняют элементарный объем $dV_0 = d\xi_1 \cdot (d\xi_2 \times d\xi_3)$. Масса среды в элементарном объеме dV_0 равна

$$dm = \rho_0(\xi)dV_0.$$

В текущий момент времени $t > t_0$ материальная частица ξ будет иметь координаты $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и

$$dm = \rho(\mathbf{x}, t)dV, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t),$$

где $dV = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3)$. Так как $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j$. то

$$dV = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) dV_0 = J dV_0$$

и соотношение

$$\rho_0(\xi, 0) = \rho(\mathbf{x}(\xi, t), t)J \quad (5.19)$$

задает закон сохранения массы в лагранжевом описании.

Величины

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{e}_\alpha \cdot (\mathbf{e}_\beta \times \mathbf{e}_\gamma); \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{123} = \sqrt{\det(g_{im})} \quad (5.20)$$

в силу (1.20) определяют ковариантные компоненты тензора ранга три, который принято называть тензором Леви-Чевиты, а также дискриминантным или альтернирующим. В (5.20) \mathbf{e}_i – векторы базиса, g_{im} – ковариантные компоненты метрического тензора G (2.14). Скалярно-векторное произведение $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ меняет знак при перестановке любых двух векторов, а отличными от нуля будут лишь компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, которые не имеют совпадающих индексов. Поэтому

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{321} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = \sqrt{\det(g_{im})}.$$

Для используемой декартовой прямоугольной системы координат $\varepsilon_{123} = 1$. С помощью тензора Леви-Чевиты закон сохранения массы (5.19) переписывается следующим образом

$$\rho_0 = \rho J = \rho \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \rho \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_\gamma} = \rho \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}. \quad (5.21)$$

Скорость изменения со временем любого параметра в индивидуальной частице движущейся сплошной среды называют *полной* (индивидуальной, материальной, субстанциональной) *производной по времени этого параметра*. Полную производную можно представить как скорость изменения изучаемого параметра во времени для наблюдателя, который движется вместе с индивидуальной частицей. Но само местонахождение частицы в момент времени $t > t_0$ также является параметром (свойством) этой частицы. Полная производная по времени от положения частицы есть ее *мгновенная скорость*:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (5.22)$$

Если $Q(\xi, t)$ – какой-либо параметр среды (скалярный, векторный, тензорный) в лагранжевом описании, то

$$\dot{Q}(\xi, t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t}. \quad (5.23)$$

Если же $Q(\mathbf{x}, t)$ – параметр среды в эйлеровом описании, то

$$\dot{Q}(x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + v_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) Q. \quad (5.24)$$

Теперь в качестве иллюстрации равноправности лагранжева и эйлерова описаний получим из (5.19) закон сохранения массы (5.6) в эйлеровом описании. Из (5.21) в соответствии с правилом дифференцирования определителя имеем

$$\frac{dJ}{dt} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{da_{1\alpha}}{dt} a_{2\beta} a_{3\gamma} + a_{1\alpha} \frac{da_{2\beta}}{dt} a_{3\gamma} + a_{1\alpha} a_{2\beta} \frac{da_{3\gamma}}{dt} \right).$$

Но

$$\frac{da_{1\alpha}}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha}, \quad \frac{da_{2\beta}}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\beta}, \quad \frac{da_{3\gamma}}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\gamma}.$$

Поэтому

$$\frac{dJ}{dt} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_i} a_{i\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} a_{1\alpha} a_{i\beta} a_{3\gamma} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3i} \right). \quad (5.25)$$

Из девяти определителей в (5.25) только три отличны от нуля, так что справедлива *формула Эйлера*:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} J + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} J = J \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5.26)$$

Далее, в силу (5.24) для ρ из (5.19) имеем

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho. \quad (5.27)$$

Наконец, продифференцируем (5.19) по t и воспользуемся (5.26), (5.27) и (4.44). Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\rho}{dt} J + \frac{dJ}{dt} \rho = J \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = \\ &= J \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = J \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Поскольку $J \neq 0$, то из (5.28) немедленно вытекает (5.6), т.е. закон сохранения массы в эйлеровом описании.

И в заключение этого параграфа следует специально отметить, что закон сохранения массы можно постулировать, т.е. принять в качестве одной из аксиом механики сплошной среды:

– для любого движущегося объема $V(t)$ его масса постоянна

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (5.29)$$

Из (5.29) вытекает как закон сохранения массы (5.6) в эйлеровом описании, так и закон сохранения массы (5.19) в лагранжевом описании. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho J dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\rho J) dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{d\rho}{dt} J + \rho \frac{dJ}{dt} \right) dV_0 = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV, \end{aligned}$$

что в точности совпадает с (5.6). Далее,

$$m = \int_{V_0} \rho_0(\boldsymbol{\xi}, 0) dV_0 = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \rho(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) J dV_0 = \int_{V_0} \rho(\boldsymbol{\xi}, t) J dV_0,$$

что в силу произвольности V_0 немедленно приводит к (5.19).

Можно принять за аксиомы и остальные законы сохранения:

— для любого движущегося объема $V(t)$ скорость изменения импульса равна главному вектору сил

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV = \int_{S(t)} \mathbf{p}_n dS, \quad (5.30)$$

— для любого движущегося объема $V(t)$ скорость изменения момента импульса равна главному моменту сил

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n) dS, \quad (5.31)$$

— для любого движущегося объема $V(t)$ скорость изменения полной энергии равна сумме мощности массовых сил, вносимой мощности напряжений и притока тепла

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV + \int_{S(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_n dS + \int_{S(t)} \mathbf{q}_n dS. \quad (5.32)$$

Далее мы перейдем к более подробному рассмотрению закона сохранения импульса (5.30), закона сохранения момента импульса (5.31) и закона сохранения полной энергии (5.32). В этой связи придется уточнить ряд используемых понятий.

§ 6. Закон сохранения импульса. Тензор истинных напряжений. Закон сохранения момента импульса.

В формулировке закона сохранения импульса (5.30) принимают участие два типа сил: поверхностные \mathbf{p}_n и массовые. Последние иногда называют объемными, поскольку их проявление связано с каждой материальной точкой, принадлежащей заданному объему. Обычно это силы, вызываемые действием гравитационного или температурного поля. Массовой является также и сила инерции.

Пусть V – изучаемый материальный объем, M – точка внутри этого объема и S_i – поверхность, проходящая через точку M и разделяющая V на две части: V_1 и V_2 . Взаимодействие объемов V_1 и V_2 происходит через поверхность S_i . С точкой M свяжем элементарную площадку ΔS_i с единичным вектором нормали \mathbf{n}_i . Среднюю результирующую силу в точке M , отнесенную к единице площади ΔS_i зададим величиной $\Delta \mathbf{p}_i / \Delta S_i$.

Предполагается (принцип напряжений Коши), что существует

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta S_i} = \mathbf{p}_{n_i} = \mathbf{p}_n(M).$$

В (6.1) важно, что *вектор напряжений* \mathbf{p}_n зависит от ориентации площадки ΔS_i , т.е. от \mathbf{n}_i , но существует при любой ориентации. Очевидно, что

$$-\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{-n}. \quad (6.2)$$

В (6.2) записан известный закон Ньютона о равенстве действия и противодействия.

В точке M аналогично предыдущему можно было бы определить и вектор момента напряжений \mathbf{Q}_{n_i} . Здесь мы будем предполагать, что

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}_i}{\Delta S_i} = \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_n(M) = 0.$$

Итак, сделанные предположения сводятся к следующим:

- воздействие одной части среды V_1 на другую V_2 осуществляется только через поверхность контакта S_i ;
- действие всех сил, приложенных к ΔS_i эквивалентно действию главного вектора сил и главного момента этих сил, приложенных в "центре" M площадки ΔS_i ;
- действием главного момента сил можно пренебречь.

С формальной точки зрения напряженное состояние в точке M , обусловленное взаимодействием объемов V_1 и V_2 , определяется бесконечным набором пар $\mathbf{p}_{n_i}, \mathbf{n}_i$. На самом деле все сводится к набору трех пар: $\mathbf{p}_{n_1}, \mathbf{n}_1; \mathbf{p}_{n_2}, \mathbf{n}_2; \mathbf{p}_{n_3}, \mathbf{n}_3$. Три избранные направления $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ естественным образом можно связать с выбором системы координат, которая используется при описании изучаемого явления. Такой выбор нами уже сделан – это декартова прямоугольная система координат.

Рассмотрим тетраэдр с вершиной $M(x_1, x_2, x_3)$, боковые стороны которого параллельны ортам $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, а боковые грани являются прямоугольными треугольниками со сторонами $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Пусть \mathbf{n} – внешняя нормаль основания, а $\mathbf{p}_{x_1}, \mathbf{p}_{x_2}, \mathbf{p}_{x_3}, \mathbf{p}_n$ – векторы напряжений (6.1), действующие на грани рассматриваемого тетраэдра. Запишем условие равенства нулю главного вектора сил, действующего на материальный объем V тетраэдра:

$$\mathbf{p}_n dS + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{-x_1} \Delta x_2 \Delta x_3 + \mathbf{p}_{-x_2} \Delta x_1 \Delta x_3 + \mathbf{p}_{-x_3} \Delta x_1 \Delta x_2) + \frac{1}{6} \mathbf{F} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = 0.$$

Здесь dS – площадь основания тетраэдра, \mathbf{F} – главный вектор массовых сил, участвующих в рассмотрении. Если учесть (6.2), то

$$\mathbf{p}_n dS - \mathbf{p}_{x_1} dS_1 - \mathbf{p}_{x_2} dS_2 - \mathbf{p}_{x_3} dS_3 + \mathbf{F} dV = 0. \quad (6.3)$$

Так как

$$\frac{dS_i}{dS} = \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}_i}),$$

то переход в (6.3) к пределу при $\Delta x_i \rightarrow 0$ дает

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{x_1} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}_1}) + \mathbf{p}_{x_2} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}_2}) + \mathbf{p}_{x_3} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}_3})$$

или

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{x_1} \cos(\widehat{\mathbf{n}, x_1}) + \mathbf{p}_{x_2} \cos(\widehat{\mathbf{n}, x_2}) + \mathbf{p}_{x_3} \cos(\widehat{\mathbf{n}, x_3}). \quad (6.4)$$

Итак, чтобы определить вектор напряжений \mathbf{p}_n на площадке с единичной нормалью \mathbf{n} достаточно знать векторы напряжений $\mathbf{p}_{x_1}, \mathbf{p}_{x_2}, \mathbf{p}_{x_3}$.

Векторное равенство (6.4) эквивалентно трем скалярным

$$(p_n)_j = p_{x_i x_j} \cos(\widehat{\mathbf{n}}, x_i) = \sum_i p_{x_i x_j} \cos(\widehat{\mathbf{n}}, x_i). \quad (6.5)$$

Введем обозначение $p_{x_i x_j} = p_{ij}$ – напряжение в направлении x_i на площадке перпендикулярной направлению x_j . Девять величин p_{ij} в (6.5) полностью определяют напряженное состояние в точке $M \in V$. Тензорный характер величин p_{ij} легко устанавливается либо с помощью аналитического определения тензора (2.1), либо с помощью тензорного критерия из §3. Итак, определен тензор \mathcal{P} ранга два с матрицей компонент

$$(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Тензор \mathcal{P} из (6.6) называют *тензором истинных напряжений* или тензором Эйлера. В силу (5.1) он определен для деформированного состояния материального объема V и $p_{ij} = p_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Тензор истинных напряжений (6.6) введен О.Коши. Говоря о тензоре Эйлера, лишь подчеркивают, что \mathcal{P} из (6.6) соответствует эйлерову описанию процесса. Для дальнейшего существенно, что (6.5) можно переписать в таком виде

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \mathcal{P} \longleftrightarrow (\mathbf{p}_n)^* = \mathcal{P}^* (\mathbf{n})^*. \quad (6.7)$$

Здесь \mathcal{P}^* – тензор сопряженный к \mathcal{P} , $(\mathbf{p}_n)^*$, $(\mathbf{n})^*$ – векторы-столбцы, \mathbf{p}_n , \mathbf{n} – векторы-строки.

С помощью (6.7) и формулы Гаусса-Остроградского (4.58) закон сохранения импульса (5.30) преобразуется следующим образом

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_V \operatorname{div} \mathcal{P} dV. \quad (6.8)$$

Дальнейшие преобразования левой части в (6.8) являются стандартными и уже использовались в §5 при получении уравнения неразрывности в эйлеровом описании (5.6) из постулируемого закона сохранения массы (5.29). Итак,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho \mathbf{v} J dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v} J) dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{d\rho}{dt} \mathbf{v} + \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) J dV_0 = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} \mathbf{v} + \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \end{aligned}$$

В силу аксиомы сохранения массы (5.29) справедливо (5.6), т.е.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

и закон сохранения импульса (6.8) можно представить так

$$\int_V \left[\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\operatorname{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}) \right] dV = 0, \quad (6.9)$$

что в силу произвольности V дает

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}. \quad (6.10)$$

Одним из искомым параметров в (5.6), (6.10) является скорость \mathbf{v} , которая определена с помощью формулы (5.22)

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \longleftrightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}.$$

При эйлеровом описании изучаемых процессов искомые параметры являются параметрами деформированного состояния, которое определено в (5.1) следующим образом

$$x_i = \xi_i + u_i \longleftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}.$$

Здесь \mathbf{u} – вектор перемещения. Поэтому наряду с (5.22) эквивалентным будет и такое определение скорости \mathbf{v} :

$$v_i = \frac{du_i}{dt} \longleftrightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (6.11)$$

Дальнейшее зависит от того какому из описаний соответствует вектор перемещений \mathbf{u} . Если $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)$ – лагранжево описание, то как и в (5.23)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t}. \quad (6.12)$$

Если же $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – эйлерово описание, то в соответствии с (5.24)

$$v_j = \dot{u}_j = \frac{du_j}{dt} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (6.13)$$

Полная производная по времени от скорости есть $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$ – ускорение и в эйлеровом описании

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}, \quad a_j = \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (6.14)$$

Поэтому дифференциальную форму записи закона сохранения импульса (6.10) можно представить в виде

$$\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}, \quad \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \operatorname{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}. \quad (6.15)$$

Очевидно, что $\rho \mathbf{a} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$ в (6.15) есть *сила инерции*, которая, как и $\rho \mathbf{f}$ является массовой (объемной).

Далее мы приведем другой, менее формальный вывод (6.10). Пусть деформированная среда, занимающая объем V и подвергающаяся действию объемных и поверхностных сил, находится в состоянии равновесия. Пусть dV – элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, а длины равны соответственно $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Главным моментом сил, действующим на dV будем пренебрегать. Будем также считать, что объемные силы приложены к центру тяжести dV , а поверхностные силы – к центру тяжести соответствующей грани. Запишем условие равенства нулю главного вектора внешних сил,

действующих на элементарный параллелепипед dV :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{p}_{-x_1} \Delta x_2 \Delta x_3 + \left(\mathbf{p}_{x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_{x_1}}{\partial x_1} \Delta x_1 \right) \Delta x_2 \Delta x_3 + \\
& + \mathbf{p}_{-x_2} \Delta x_1 \Delta x_3 + \left(\mathbf{p}_{x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_{x_2}}{\partial x_2} \Delta x_2 \right) \Delta x_1 \Delta x_3 + \\
& + \mathbf{p}_{-x_3} \Delta x_1 \Delta x_2 + \left(\mathbf{p}_{x_3} + \frac{\partial \mathbf{p}_{x_3}}{\partial x_3} \Delta x_3 \right) \Delta x_1 \Delta x_2 + \\
& + \mathbf{F} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = 0.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

В (6.16) \mathbf{F} – вектор объемных сил. Учтем теперь (6.2) и перейдем в (6.16) к пределу при $\Delta x_i \rightarrow 0$. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{x_i}}{\partial x_i} + \mathbf{F} = 0 \longleftrightarrow \operatorname{div} \mathcal{P} + \mathbf{F} = 0 \longleftrightarrow \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{6.17}$$

Достаточно теперь положить в (6.17)

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{a}, \tag{6.18}$$

чтобы получить (6.10) или (6.15). В переходе от (6.17), (6.18) к (6.10) реализован хорошо известный в механике *принцип Даламбера*.

Статическими (квазистатическими) процессами в механике сплошных сред называют процессы, в которых характерное время изменения заданных нагрузок мало по сравнению с характерным временем распространения возмущений в сплошной среде. Для таких процессов с достаточной степенью точности можно пренебречь силами инерции и считать, что массовая сила $\rho \mathbf{f}$ либо не зависит от t (статический процесс), либо зависит от t параметрически (квазистатический процесс). В этих случаях (6.17) означает, что воздействие массовых сил $\rho \mathbf{f}$ в любом элементарном объеме dV уравнивается реакцией $\operatorname{div} \mathcal{P}$. В соответствии с только что сказанным (6.17) называют *уравнением равновесия*. Если статическое равновесие не имеет места, то для каждой материальной точки $M \in dV$ определено движение, задаваемое вектором \mathbf{v} из (5.22), а в каждый момент времени t сила $\rho \mathbf{f}$ и реакция $\operatorname{div} \mathcal{P}$ уравниваются силой инерции $\rho \mathbf{a}$ (принцип Даламбера). Поэтому в (6.17)

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \rho \mathbf{f} & \text{– для статических процессов,} \\ (\rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{a}) & \text{– для динамических процессов.} \end{cases} \tag{6.19}$$

Учитывая вышесказанное, постулируемый в (5.31) закон сохранения момента импульса можно сформулировать следующим образом: для любого $t > t_0$

$$\int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{F}) dV + \int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n) dS = 0. \tag{6.20}$$

Дальнейшее свяжем с преобразованием поверхностного интеграла в (6.20). Имеем

$$\begin{aligned}
\int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n) dS &= \int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_i} \cos(\widehat{\mathbf{n}}, x_i)) dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_i}) dV = \\
&= \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} \times \mathbf{p}_{x_i} \right) dV + \int_V \left(\mathbf{x} \times \frac{\partial \mathbf{p}_{x_i}}{\partial x_i} \right) dV = \\
&= \int_V (\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) p_{ji} dV + \int_V (\mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathcal{P}) dV.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Подстановка (6.21) в (6.20) дает

$$\int_V [\mathbf{x} \times (\operatorname{div} \mathcal{P} + \mathbf{F})] dV + \int_V (\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) p_{ji} dV = 0. \quad (6.22)$$

Поскольку

$$(\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_i) = 0, \quad (\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) = -(\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_i),$$

то

$$(\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) p_{ji} = (\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) (p_{ji} - p_{ij}). \quad (6.23)$$

Остается подставить (6.23) в (6.22), чтобы получить окончательный результат

$$\int_V [\mathbf{x} \times (\operatorname{div} \mathcal{P} + \mathbf{F})] dV + \int_V (\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) (p_{ji} - p_{ij}) dV = 0. \quad (6.24)$$

Итак, закон сохранения момента импульса (6.20) является следствием уравнений (6.17), (6.19) и предположения о симметричности тензора истинных напряжений: $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$. Если же симметричность \mathcal{P} в (6.17) заранее не предполагается, то соотношение $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ является следствием (6.17), (6.19) и закона сохранения момента импульса (6.20).

Можно также отметить, что заключение о симметричности тензора истинных напряжений \mathcal{P} в (6.17) вытекает из условия равенства нулю моментов сил, действующих на гранях элементарного объема dV . Действительно, по определению момента это означает, что

$$\det \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ \Delta x_1 & 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \end{array} \right] \Delta x_2 \Delta x_3 + \begin{array}{ccc} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ 0 & \Delta x_2 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{array} \Delta x_1 \Delta x_3 + \\ + \begin{array}{ccc} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ 0 & 0 & \Delta x_3 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array} \Delta x_1 \Delta x_2 \Big] = 0.$$

Поделив это равенство на $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ и раскрывая определители, получаем

$$(-\mathbf{q}_2 p_{13} + \mathbf{q}_3 p_{12}) + (\mathbf{q}_1 p_{23} + \mathbf{q}_3 p_{21}) + (-\mathbf{q}_1 p_{32} + \mathbf{q}_2 p_{31}) = 0$$

или

$$(p_{23} - p_{32}) \mathbf{q}_1 + (p_{31} - p_{13}) \mathbf{q}_2 + (p_{12} - p_{21}) \mathbf{q}_3 = 0. \quad (6.25)$$

Теперь остается учесть, что в (6.17) и в (6.25) величины p_{ij} являются компонентами одного и того же тензора \mathcal{P} .

Уравнение неразрывности, соответствующее закону сохранения массы (5.29) можно записать как в дивергентной форме (5.6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

так и в недивергентной

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (6.26)$$

Эквивалентность этих уравнений следует из (4.44) и определения полной производной по времени при эйлеровом описании (5.24). Выбор той или иной формы записи в каждой конкретной ситуации может быть обусловлен различными

причинами. При использовании *метода сеток* (разностных методов) для численного решения задач механики сплошной среды практически общепринятой является точка зрения о предпочтительности дивергентной формы записи законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Именно в этой связи представим здесь закон сохранения импульса (5.30) в дивергентной дифференциальной форме.

Будем исходить из уравнения движения (6.10)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}^*.$$

Прежде всего отметим очевидные тождества

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (6.27)$$

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) - v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \quad (6.28)$$

и компонентную запись дивергентного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0. \quad (6.29)$$

Кроме того, по определению

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (6.30)$$

Если теперь сложить (6.27) и (6.28), то с учетом (6.29), (6.30) получим

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j).$$

Отсюда немедленно следует дивергентная дифференциальная форма уравнения движения в компонентной записи

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ji} - \rho v_i v_j) + \rho f_i, \quad p_{ij} = p_{ji}. \quad (6.31)$$

В соответствии с тензорным критерием из § 3 величины $v_i v_j$ являются компонентами симметричного диадного тензора ($\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$) ранга два и тогда

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}[\mathcal{P} - \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] + \rho \mathbf{f}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}^*. \quad (6.32)$$

И в заключение этого параграфа обратимся к дифференциальным математическим моделям механики сплошной среды, которые основаны на законах сохранения массы (5.29) и импульса (5.30). Для эйлерова описания имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} &= \operatorname{div}[\mathcal{P} - \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] + \rho \mathbf{f}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}^*. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Четыре уравнения в (6.32) связывают *десять* искомых параметров: $\rho(\mathbf{x}, t)$, $v_i(\mathbf{x}, t)$, $p_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Число уравнений меньше числа искомых параметров, дифференциальная модель (6.23) не является замкнутой.

Жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение, называется *идеальной*. Для идеальной жидкости тензор истинных напряжений Эйлера (6.6) является шаровым, т.е.

$$\mathcal{P} = -pG. \quad (6.34)$$

В (6.34) G – метрический тензор, задаваемый смешанными компонентами $g_{.j}^i$, так что для рассматриваемой системы координат $g_{.j}^i = \delta_{ij}$. Скалярная функция $p = p(\mathbf{x}, t)$ в (6.34) называется *давлением*. Для идеальной жидкости вместо (6.32) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \operatorname{grad} p &= \rho \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Теперь *четыре* уравнения в (6.35) связывают пять искомых параметров: $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$, $v_i(\mathbf{x}, t)$. Для замыкания математической модели (6.35) достаточно задать уравнение состояния

$$p = p(\rho). \quad (6.36)$$

Сплошную среду с определяющим соотношением (6.34) и уравнением состояния (6.36) принято называть *баротропной*. Для замыкания математической модели (6.35) достаточно также предположить, что рассматриваемая жидкость является несжимаемой. Это предположение записывается в виде $\dot{\rho} = 0$ и в силу (6.26) позволяет вместо (6.35) получить замкнутую модель (*уравнения Эйлера*)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho = \operatorname{const} \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \operatorname{grad} p = \rho \mathbf{f} \iff \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = \rho \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

В связи с уравнениями Эйлера вернемся к математической модели фильтрации несжимаемой жидкости (5.10), которую перепишем здесь в таком виде

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \quad \rho = \operatorname{const}. \quad (6.38)$$

Сравнение (6.37) и (6.38) показывает, что с точностью до объемных сил закон сохранения импульса для идеальной несжимаемой жидкости в математической модели фильтрации (6.38) представлен в форме закона Дарси.

Закон сохранения импульса в задачах механики сплошной среды имеет универсальный характер. С другой стороны, в теории фильтрации закон Дарси (5.8) часто постулируется в качестве экспериментально установленного. Поэтому полезно хотя бы в самых общих чертах иметь представление о тех допущениях, которые позволяют перейти от закона сохранения импульса к закону Дарси.

Поскольку $\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{a}$, то первое допущение очевидно: в фильтрационном течении силами инерции можно пренебречь. Пористую среду в первом приближении можно представить себе как совокупность сообщающихся поровых каналов, заключенных в твердый скелет. При течении жидкости (газа) в такой среде возникает сила трения на границе раздела скелет – жидкость. Поскольку поверхность поровых каналов достаточно велика, то силу трения можно считать распределенной по всему объему течения и рассматривать как объемную. Таков смысл второго допущения. Третье допущение состоит в том, что сила трения пропорциональна скорости фильтрации \mathbf{v} с некоторым коэффициентом

пропорциональности λ . Допустим, наконец, что действием всех иных объемных сил на фильтрационное течение можно пренебречь.

С учетом сделанных допущений закон сохранения импульса преобразуется к виду

$$\text{grad} p = \rho \lambda \mathbf{v}. \quad (6.39)$$

Достаточно теперь в (6.39) положить $\lambda = -\mu/k\rho$, чтобы получить обычную запись (5.8) закона Дарси для однородной несжимаемой жидкости. Из уравнений Эйлера давление p определяется с точностью до произвольной постоянной p_0 , которая задает уровень отсчета давления. Если в (6.37) $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ и ускорение силы тяжести \mathbf{g} постоянно по объему, то

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{grad} p = \rho \mathbf{g} \longleftrightarrow \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{grad} \Phi = 0, \quad (6.40)$$

где

$$\Phi = p - p_0 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}. \quad (6.41)$$

Скалярную функцию Φ из (6.40), (6.41) обычно называют модифицированным давлением или потенциалом. Использование потенциала в уравнениях Эйлера позволяет в рамках предыдущих допущений сформулировать закон Дарси следующим образом

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} \Phi.$$

Нетрудно понять, что все сказанное в § 5 о математической модели фильтрации однородной несжимаемой жидкости (5.10), (5.11) остается справедливым и для математической модели

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \rho = \text{const.}, \quad M \in D, \\ \mathbf{v} &= -\frac{k}{\mu} \text{grad} \Phi, \quad \Phi = p - p_0 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

с краевым условием (5.11). В случае краевого условия (5.11б) единственное решение $\Phi(M)$ выделяется с помощью задания p_0 или с помощью условия $(\Phi, 1)_D = 0$.

§ 7. Тензор деформации. Математические модели "линейной" теории упругости.

В общем случае для замыкания дифференциальной математической модели, основанной на законах сохранения (5.29)–(5.31)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} &= \text{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}^* \end{aligned} \quad (7.1)$$

нам потребуется введение новых объектов, основным из которых является *тензор деформации*. Напомним, что мы рассматриваем сплошную среду, материальные частицы которой в начальный момент (до воздействия каких-либо сил) имеют координаты ξ_i (лагранжевы координаты), а в текущий момент x_i – эйлеровы. При деформации среды ее материальные частицы перемещаются относительно друг друга и если $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения, то

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i + u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longleftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}, \\ \xi_i &= x_i - u_i(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Формулы (7.2) устанавливают взаимнооднозначное соответствие $\xi \longleftrightarrow \mathbf{x}$ и показывают, что описание процесса деформации в терминах x_i или ξ_i неизбежно различается.

Пусть материальная частица недеформированной сплошной среды находилась в точке $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv A(\xi_i)$, а в результате деформации переместилась в точку $A^*(x_i)$. Для "близкой соседней" материальной частицы будем иметь $B(\xi_i + d\xi_i) \longrightarrow B^*(x_i + dx_i)$. Тогда

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (ds)^2 = \sum_i d\xi_i^2, \quad |\overrightarrow{A^*B^*}|^2 = (ds^*)^2 = \sum_i dx_i^2.$$

Из (7.2) имеем

$$dx_i = d\xi_i + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \quad (7.3)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} dx_1^2 &= \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi_2^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right)^2 d\xi_3^2 + \\ &+ 2 \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right) \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 + 2 \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right) \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} d\xi_1 d\xi_3 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} d\xi_2 d\xi_3, \\ dx_2^2 &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1^2 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi_2^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right)^2 d\xi_3^2 + \\ &+ 2 \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right) \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} d\xi_1 d\xi_3 + 2 \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right) \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} d\xi_2 d\xi_3, \\ dx_3^2 &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi_2^2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right)^2 d\xi_3^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 + 2 \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right) \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_3 + 2 \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right) \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Следовательно,

$$(ds^*)^2 - (ds)^2 = 2\hat{\varepsilon}_{\xi_i \xi_k} d\xi_i d\xi_k = 2\hat{\varepsilon}_{ik} d\xi_i d\xi_k, \quad (7.5)$$

где в соответствии с (7.4)

$$2\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}, \quad i, k, j = 1, 2, 3. \quad (7.6)$$

Сразу же отметим, что $\hat{\varepsilon}_{ik} = \hat{\varepsilon}_{ki}$.

Шесть коэффициентов симметричной квадратичной формы (7.5) в силу определения (2.1) (или тензорного критерия из § 3) являются компонентами симметричного тензора ранга два. Этот тензор носит название *тензора конечных деформаций Грина* и соответствует лагранжеву описанию процесса деформации.

При эйлеровом описании процесса деформации следует вместо (7.3) использовать

$$d\xi_i = dx_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

и тогда вместо (7.5) будем иметь

$$(ds^*)^2 - (ds)^2 = 2\tilde{\varepsilon}_{x_i x_k} dx_i dx_k = 2\tilde{\varepsilon}_{ik} dx_i dx_k,$$

где $\tilde{\varepsilon}_{ik} = \tilde{\varepsilon}_{ki}$ – компоненты *тензора конечных деформаций Альманси*:

$$2\tilde{\varepsilon}_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (7.7)$$

Предположим теперь, что рассматриваемая сплошная среда является *упругой*. Эквивалентными определениями такого свойства являются следующие:

1. Между тензорами деформаций и напряжений имеет место взаимнооднозначное соответствие.
2. Работа деформации по любому замкнутому циклу равна нулю.

В дальнейшем речь пойдет именно об упругих средах. В этой связи здесь стоит отметить, что только для таких сред справедлив упомянутый в §6 принцип Даламбера.

При выбранном здесь эйлеровом описании соотношения "деформации – перемещения" (7.7) и предположение о том, что изучаемая среда является упругой достаточны для замыкания математической модели (7.1). Действительно, определение 1 предполагает *существование* шести соотношений "напряжения – деформации": $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \longleftrightarrow p_{ik}$. Число искоемых параметров такой модели: ρ , v_i , u_i , $\tilde{\varepsilon}_{ik}$, p_{ik} равно числу уравнений, связывающих эти параметры. Только что сказанное, безусловно, относится и к лагранжеву описанию. Здесь следует предварительно ввести какой-либо симметричный лагранжев тензор напряжений $\hat{\mathcal{P}}$ (такие существуют), перейти в (7.1) к лагранжеву описанию, а вместо (7.7) использовать (7.6). Тогда опять-таки в силу определения 1 *существуют* шесть соотношений "напряжения – деформации": $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} \longleftrightarrow \hat{p}_{ik}$.

Теперь следует конкретизировать соотношения "напряжения – деформации" для упругой среды. Будем считать, что изучаемые процессы происходят без обмена тепла с внешней средой (*адиабатические процессы*). В специальных разделах механики сплошной среды показывается, что свойство "упругость" в смысле определения 2 приводит к следующим соотношениям "напряжения – деформации" (формулы Мурнагана):

$$p_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} (\delta_{ij} - 2\tilde{\varepsilon}_{ik}) \frac{\partial U}{\partial \tilde{\varepsilon}_{kj}}. \quad (7.8)$$

В (7.8) $U = U(J_1, J_2, J_3) \geq 0$ – удельная внутренняя энергия; J_1, J_2, J_3 – инварианты тензора конечных деформаций Альманси (7.7), так что (см. (3.49))

$$J_1 = tr(\tilde{\mathcal{E}}), \quad J_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\varepsilon}_{ii}\tilde{\varepsilon}_{kk} - \tilde{\varepsilon}_{ik}^2), \quad J_3 = \det(\tilde{\varepsilon}_{ik}). \quad (7.9)$$

Из (7.8) вытекает, что без каких-либо дополнительных предположений относительно упругой среды, зависимость между тензорами \mathcal{P} и $\tilde{\mathcal{E}}$ не сводится только к линейной.

Пусть между тензором истинных напряжений \mathcal{P} и тензором конечных деформаций Альманси имеет место какая-либо зависимость типа

$$\mathcal{P} = \sum_m \alpha_m \tilde{\mathcal{E}}^m, \quad \tilde{\mathcal{E}}^0 = G, \quad g_k^i = \delta_{ik}, \quad (7.10)$$

где α_m – скалярные функции инвариантов тензора деформации, а $\tilde{\mathcal{E}}^m$ понимается как m -кратная композиция тензора $\tilde{\mathcal{E}}$. Компоненты тензора $\tilde{\mathcal{E}}^m$ могут быть вычислены с помощью (3.12). В силу теоремы Кэли–Гамильтона каждая

квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Поэтому

$$\tilde{\mathcal{E}}^3 = J_1 \tilde{\mathcal{E}}^2 - J_2 \tilde{\mathcal{E}} + J_3 G. \quad (7.11)$$

Соотношение (7.11) позволяет исключить из (7.10) $\tilde{\mathcal{E}}^m$ для $m \geq 3$ и представить (7.10) в таком виде

$$\tilde{\mathcal{P}} = \beta_0 G + \beta_1 \tilde{\mathcal{E}} + \beta_2 \tilde{\mathcal{E}}^2, \quad (7.12)$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ – скалярные функции инвариантов J_1, J_2, J_3 .

Сплошная среда V называется *однородной*, если ее свойства одинаковы для каждой материальной точки $M \in V$. *Изотропной* называют такую среду, свойства которой одинаковы во всех направлениях. Если U, β_i являются функциями только инвариантов J_1, J_2, J_3 , то сплошная среда, которой приписано свойство (7.8) или (7.11) по определению является однородной и изотропной. Это, в свою очередь, означает, что тензор $\tilde{\mathcal{E}}$ определен, вообще говоря, с точностью до ортогонального тензора.

Дальнейшее свяжем с линейризацией замкнутой модели (7.1), (7.7), (7.12). Будем считать, что первые производные перемещений по пространственным переменным малы по сравнению с единицей, а произведениями и квадратами первых производных можно пренебречь по сравнению с первыми производными, т.е.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \ll 1 \longrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = O(\delta), \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\beta} = O(\delta^2). \quad (7.13)$$

Это предположение позволяет:

— перейти в (7.7) от тензора Альманси к *тензору малых деформаций* \mathcal{E}

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (7.14)$$

— с точностью до членов $O(\delta^2)$ представить (7.12) следующим образом

$$\mathcal{P} = \lambda J_1(\mathcal{E})G + 2\mu \mathcal{E}, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const} > 0. \quad (7.15)$$

Константы λ, μ в (7.15) называют константами Ламе, а само соотношение (7.15) – *законом Гука*. Принципиальным для (7.15) является тот факт, что константы Ламе можно выразить через некоторые другие константы, которые, в свою очередь, непосредственно измеряются в достаточно простых экспериментах.

Рассмотрим, например, одноосное напряженное состояние, для которого матрицы компонент тензоров \mathcal{P} и \mathcal{E} имеют вид

$$(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

Такое напряженное состояние с достаточной точностью реализуется, если соосный с \mathbf{q}_1 прямой круговой цилиндр длины l с площадью поперечного сечения $S = \pi r^2$, $r < l$ растягивать (сжимать) силами F , нормально и равномерно распределенными на торцах. Под F понимается сила, отнесенная к единице площади. Боковую поверхность цилиндра следует считать свободной от напряжений. Из (7.15), (7.16) получим

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$p_{11} = E\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}, \quad (7.17)$$

где

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (7.18)$$

Итак, при одноосном напряженном состоянии (7.16) p_{11} пропорционально ε_{11} , *модуль Юнга* E задает коэффициент пропорциональности. Первое из соотношений (7.17) Р.Гук сформулировал так: "ut tensio sic vis – какова сила, таково удлинение". В рассматриваемом случае $p_{11} = F/S$ и если Δl – изменение длины, то $\varepsilon_{11} = \Delta l/l$. Поэтому модуль Юнга можно вычислить, исходя из реально измеряемых величин: $E = Fl/S\Delta l$.

В рассматриваемом примере при растяжении (сжатии) элементарного объема dV в направлении \mathbf{q}_1 возникают сжатия (растяжения) в направлениях \mathbf{q}_2 , \mathbf{q}_3 . Количественной мерой относительных сжатий (растяжений) является *коэффициент Пуассона* ν из (7.17), (7.18). Если радиус поперечного сечения изменяется на Δr , то относительное поперечное сжатие (растяжение) равно $\Delta r/r$ и коэффициент Пуассона также вычисляется через реально измеряемые величины: $\nu = -l\Delta r/r\Delta l$.

Из (7.15) вытекает, что первые инварианты тензора \mathcal{P} , \mathcal{E} связаны соотношением

$$J_1(\mathcal{P}) = \text{tr}(\mathcal{P}) = (3\lambda + 2\mu)\text{tr}(\mathcal{E}). \quad (7.19)$$

Предположения (7.13) позволяют перейти от (7.12) к закону Гука (7.15). В рамках этих предположений закон сохранения массы $\rho_0 = \rho J$ переходит в

$$1 - \frac{\rho}{\rho_0} = J_1(\mathcal{E}). \quad (7.20)$$

Поэтому $J_1(\mathcal{E}) < 0$ соответствует сжатию элементарного объема dV , $J_1(\mathcal{E}) > 0$ – расширению, $J_1(\mathcal{E}) = 0$ – несжимаемой сплошной среде. Если $p_{11} = p_{22} = -p$, $p > 0$, то из (7.19) получаем

$$-p = K J_1(\mathcal{E}), \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (7.21)$$

Коэффициент K в (7.21) называется *модулем объемного сжатия*. Чтобы измерить K достаточно реализовать напряженно-деформированное состояние, для которого тензоры \mathcal{E} , \mathcal{P} – шаровые и $p_{ii} = -p$.

И, наконец, рассмотрим опыт по определению напряженно-деформированного состояния прямоугольного параллелепипеда V_0 , боковые ребра которого параллельны \mathbf{q}_1 . Пусть нижняя грань ($\xi_3 = x_3 = 0$) закреплена, а в каждой точке верхней грани ($\xi_3 = x_3 = a$) приложена сила F в направлении \mathbf{q}_2 . Под F понимается сила, отнесенная к единице площади, так что на грани $\xi_3 = x_3 = a$ задан вектор напряжений с компонентами $p_{13} = 0$, $p_{23} = F$, $p_{33} = 0$. Остальные грани: $x_1 = \xi_1 = 0$, $x_1 = \xi_1 = l$, $x_2 = \xi_2 = 0$ и $x_2 = \xi_2 = l$ – свободны от напряжений. С достаточной степенью точности можно считать, что в таком опыте осуществляется отображение недеформированного *прямоугольного* параллелепипеда $V_0(\boldsymbol{\xi})$ в деформированный параллелепипед $V(\mathbf{x})$, все поперечные сечения которого – параллелограммы. Отображение $V_0 \rightarrow V$ поворачивает плоские сечения $\xi_2 = \text{const.}$, $0 \leq \xi_2 \leq a$ на угол φ в направлении \mathbf{q}_2 : реализуется *простой сдвиг*. Мерой этого сдвига служит угол φ , а *модуль сдвига* $\alpha = F/\varphi$ определяется реально измеряемыми величинами.

В силу (7.2) отображение $V_0(\boldsymbol{\xi}) \longrightarrow V(\mathbf{x})$ можно охарактеризовать вектором перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$, так что при простом сдвиге

$$u_1 = 0, \quad u_2 = x_3 \operatorname{tg} \varphi \simeq x_3 \varphi, \quad u_3 = 0.$$

Все компоненты тензора малых деформаций \mathcal{E} равны нулю за исключением $2\varepsilon_{23} = \varphi$. Равны нулю и все компоненты тензора \mathcal{P} , кроме $p_{23} = F$. Поэтому, учитывая (7.15), $F/\varphi = \alpha = p_{23}/2\varepsilon_{23} = \mu$.

Можно считать экспериментально установленным фактом, что $K > 0$, $\mu > 0$. Тогда из (7.18), (7.21) вытекает: $E > 0$, $\lambda > 0$, $0 < \nu < 1/2$. Это дает возможность записать закон Гука (7.15) используя любую пару упругих констант. Например,

$$\mathcal{P} = \frac{E}{1+\nu} \left[\mathcal{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} J_1(\mathcal{E}) G \right].$$

Итак, если изучаемая сплошная среда является однородной, изотропной и упругой, то предположение (7.13) позволяет конкретизировать замкнутую математическую модель, основанную на законах сохранения массы, импульса и момента импульса:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &\simeq \rho_0(\boldsymbol{\xi})[1 - J_1(\mathcal{E})] = \rho(\mathbf{x}, t_0)[1 - J_1(\mathcal{E})], \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \operatorname{div} \mathcal{P} + \rho \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \varepsilon_{ik} &\simeq \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad p_{ik} \simeq \lambda J_1(\mathcal{E}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Символом \simeq отмечены те из соотношений в (7.22), при получении которых использовались предположения (7.13).

Дальнейшие упрощения (7.22) свяжем с дополнительным предположением о "малости" самих перемещений. Именно, будем считать, что $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \ll l^2$, где l – характерный линейный размер рассматриваемого упругого тела. Вместе с (7.13) это дает

$$u_i = O(\delta), \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = O(\delta). \quad (7.23)$$

Условия (7.23) позволяют не различать тензоры малых деформаций Грина и Альманси. Кроме того, векторное поле малых перемещений $u_i = O(\delta)$ в силу $\mathbf{u} = \mathbf{v}\Delta t + O(\Delta t^2)$ порождает векторное поле малых мгновенных скоростей $v_i = O(\delta)$ и тогда

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + O(\delta^2), \\ a_i &= \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + O(\delta^2). \end{aligned}$$

В силу (6.12)–(6.14) это означает, что условия (7.23) позволяют не различать векторные поля перемещений, скоростей и ускорений в эйлеровом и лагранжевом описаниях. С той же степенью точности можно не различать $(\operatorname{div} \mathcal{P})_{\mathbf{x}}$ и $(\operatorname{div} \mathcal{P})_{\boldsymbol{\xi}}$. Поэтому условия (7.23) и выбор лагранжева описания ($\rho = \rho_0$) приводят к линейной замкнутой модели

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \operatorname{div} \mathcal{P} + \rho_0 \mathbf{f}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \\ 2\varepsilon_{ik} &= \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i}, \quad p_{ik} = \lambda J_1(\mathcal{E}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Параметрами модели являются: $u_i, v_i, \varepsilon_{ik}, p_{ik}$.

Из (7.24) нетрудно получить

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} \equiv \mathbf{A} \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f}. \quad (7.25)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, определенный в (4.51), а для оператора A из (7.25) принято название: *оператор Ламе*. Переход от (7.24) к (7.25) по существу определяет способ реализации и *порядок определения* искомых параметров замкнутой модели (7.24). Именно,

$$\mathbf{v} \longleftarrow \mathbf{u} \longrightarrow \varepsilon_{ik} \longleftrightarrow p_{ik}. \quad (7.26)$$

Этап $\mathbf{u} \longrightarrow \varepsilon_{ik}$ реализуется с помощью соотношений перемещения – деформации

$$2\varepsilon_{ik} = u_{i,k} + u_{k,i}, \quad (7.27)$$

а этап $\varepsilon_{ik} \longrightarrow p_{ik}$ – с помощью соотношений деформации – напряжения

$$p_{ik} = \lambda J_1(\mathcal{E}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \quad (7.28)$$

Понятно, что этапы (7.27) и (7.28) можно объединить.

Пусть $D(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = D(M)$ – ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей $S(N)$, \mathbf{n} – вектор-столбец внешней нормали. Изучаемую упругую деформируемую сплошную среду будем связывать с D , а нестационарный (динамический) процесс упругого деформирования – с цилиндром $Q = \{D \times [t_0 \leq t \leq t_1]\}$. В соответствии с (7.24)–(7.28) для *динамической задачи линейной теории упругости* в цилиндре Q следует искать вектор перемещений $\mathbf{u}(M, t)$ как решение уравнения (7.25), удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Будем считать, что на боковой поверхности $\{S \times [t_0 \leq t \leq t_1]\}$ цилиндра Q искомое решение подчинено одному из нижеприведенных краевых условий:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \mathbf{u}(N, t) = 0, \quad N \in S; \\ \text{б) } & p_{im} n_m(N, t) = 0, \quad N \in S; \\ \text{в) } & S = S_1 \cup S_2; \quad \mathbf{u}(N, t) = 0, \quad N \in S_1; \quad p_{im} n_m(N, t) = 0, \quad N \in S_2. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Краевые условия (7.29) имеют прозрачный физический смысл. Если граница S упругого тела D закреплена, то мы приходим к (7.29а). Если же граница S упругого тела D свободна от напряжений, то имеет место (7.29б). Будем также считать, что каким-либо способом можно задать

$$\mathbf{u}(M, t_0) = \varphi(M), \quad \mathbf{v}(M, t_0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(M, t_0) = \psi(M). \quad (7.30)$$

Тем самым для определения вектора перемещений $\mathbf{u}(M, t)$ поставлена *смешанная задача Коши* (начально-краевая задача).

В стационарной (статической) модели (7.24), где силами инерции можно пренебречь, вместо (7.25) получим

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{drad div } \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} \equiv \mathbf{A} \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} = 0, \quad M \in D. \quad (7.31)$$

Статическая краевая задача для вектора перемещений $\mathbf{u}(M)$ заключается в отыскании решения векторного уравнения (7.31), удовлетворяющего одному из стационарных краевых условий (7.29). Параметры стационарной модели (7.24) $\varepsilon_{ik}(M)$, $p_{ik}(M)$ определяются затем из (7.27), (7.28).

Говоря о *постановке* линейных задач теории упругости в *перемещениях* обычно имеют в виду (7.25), (7.31) и указанный в (7.26) порядок определения параметров модели (7.24).

Как уже говорилось, движение сплошной среды считается заданным, если указано взаимно-однозначное соответствие между эйлеровыми и лагранжевыми координатами

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) \longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t_0) \longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t_0). \quad (7.32)$$

Соответствие (7.32) можно определить либо заданием поля перемещений \mathbf{u} (что кажется наиболее естественным), либо заданием поля скоростей. Связь между этими полями и (7.32) устанавливают соотношения (5.1), (5.22) и (6.11)–(6.14). Если, как это фактически было сделано, за эйлеровы координаты принять \mathbf{x} – координаты точек пространства, в котором движется сплошная среда, то за $\boldsymbol{\xi}$ следует принять вектор $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, который отмечает положение материальной частицы в начальный момент времени t_0 . Тогда в (7.30) $\mathbf{u}(M, t_0) = \mathbf{u}_0 = 0$, а тензор малых деформаций $\mathcal{E}(M, t)$ выступает в качестве меры сравнения двух состояний сплошной среды: в начальный момент времени t_0 и в текущий момент времени t . При этом отображению

$$0 = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(M, t_0) \longrightarrow \mathbf{u}(M, t)$$

соответствует отображение

$$0 = \mathcal{E}(\mathbf{u}_0) = \mathcal{E}(M, t_0) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{u}(M, t)) = \mathcal{E}(M, t).$$

Введем в рассмотрение *вектор жесткого перемещения*

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{x}),$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} – постоянные векторы. По определению

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 + (b_2 x_3 - b_3 x_2), \\ w_2 &= a_2 + (b_3 x_1 - b_1 x_3), \\ w_3 &= a_3 + (b_1 x_2 - b_2 x_1). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Очевидно, что $\mathcal{E}(\mathbf{w}) = 0$, поэтому $\mathcal{E}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) = 0$. Это означает, что начальное (недеформированное) состояние $\mathcal{E}(M, t_0)$ всегда определено с точностью до вектора жесткого перемещения (7.33). Следовательно, выбор $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_0$ фиксирует ”вмороженную” в упругое тело систему координат \mathbf{x} , которая используется при описании движения.

Пусть $\mathbf{u}(M, t_0) = \boldsymbol{\varphi}(M)$. Если $2\varepsilon_{ik}(M, t_0) = \varphi_{i,k} + \varphi_{k,i}$, то соотношения ”перемещения-деформации” (7.27) можно переписать в эквивалентной форме

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = v_{i,k} + v_{k,i}. \quad (7.34)$$

Это приводит к замкнутой динамической модели теории упругости, которая не содержит параметр $\mathbf{u}(M, t)$:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \operatorname{div} \mathcal{P} + \rho_0 \mathbf{f} \\ 2 \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} &= \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial v_k}{\partial \xi_i}, \quad p_{ik} = \lambda J_1(\mathcal{E}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Параметрами модели (7.35) служат: v_i , ε_{ik} , p_{ik} . Поскольку $\varepsilon_{ik} \longleftrightarrow p_{ik}$, то с (7.5) обычно связывают постановку динамических задач теории упругости в ”*скоростях-напряжениях*”.

§ 8. Условия совместности (сплошности) деформаций.

Основой для введенных в предыдущем параграфе тензоров деформаций $\hat{\mathcal{E}}$ (7.6) и $\tilde{\mathcal{E}}$ (7.7) служат соотношения (7.2):

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i + u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longleftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u} \\ \xi_i &= x_i - u_i(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Эти соотношения изначально предполагают, что в динамической или статической модели упругого деформирования сплошной среды можно ввести такой параметр как вектор перемещений \mathbf{u} . Иными словами, предполагается, что такой параметр *существует*.

С другой стороны, само понятие деформации по существу связано с описанием *отображения* недеформированного состояния упругой сплошной среды в деформированное. Такое описание можно дать и без привлечения параметра \mathbf{u} .

Изучаемую сплошную упругую среду "до деформации" свяжем с материальным объемом D и локальной криволинейной системой координат (\mathbf{y}) . Это означает, что в каждой материальной точке $M \in D$, $M = M(\mathbf{y})$ определен базис \mathbf{e}_i (кобазис \mathbf{e}^i) и метрический тензор $G = G(\mathbf{y})$, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$. В силу (1.3) задание локального базиса предполагает существование *отсчетной* системы координат (\mathbf{x}) : $x_i = x_i(\mathbf{y}) \longleftrightarrow y_i = y_i(\mathbf{x})$.

Процесс деформирования можно представить себе как непрерывный переход от системы координат (\mathbf{y}) (до деформации) к системе координат (\mathbf{z}) (после деформации). С материальной точкой $M \in D$, $M = M(\mathbf{z})$ свяжем локальный базис $\hat{\mathbf{e}}_i$ и метрический тензор $\hat{G} = \hat{G}(\mathbf{z})$, $\hat{g}_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$. Будем считать, что проходящие через точку M координатные линии до деформации (касательные направления \mathbf{e}_i) и координатные линии после деформации (касательные направления $\hat{\mathbf{e}}_i$) состоят из одних и тех же материальных точек. Определение $\hat{\mathbf{e}}_i$ связано с заданием отсчетной системы $(\hat{\mathbf{x}})$. Равноправие выбора: $(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x})$, либо $(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{y})$ обеспечивается взаимнооднозначным соответствием $(\mathbf{x}) \longleftrightarrow (\mathbf{y})$. Для определенности можно считать, что $(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x})$.

Здесь важно отметить, что коль скоро зафиксирована отсчетная система координат (\mathbf{x}) , то только одна из систем (\mathbf{y}) или (\mathbf{z}) может быть произвольной. Именно, если задана система (\mathbf{y}) , то (\mathbf{z}) определится деформацией и наоборот. В отсчетной системе (\mathbf{x}) материальная точка $M \in D$ до и после деформации имеет разные координаты. Поэтому в системе (\mathbf{x}) деформацию можно описать и как отображение $D(\mathbf{y})$ (до деформации) в $\hat{D}(\mathbf{z})$ (после деформации).

Недеформированному состоянию (система (\mathbf{y})) соответствует фундаментальная квадратичная форма (2.24):

$$|d\mathbf{r}|^2 = ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta. \quad (8.2)$$

Задание $g_{\alpha\beta}$ в (8.2) позволяет измерять расстояния ds_i между бесконечно близкими материальными точками, принадлежащими i -ой координатной линии (формула (2.26)), а также углы между \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j (формула (2.27)). Для деформированного состояния (система (\mathbf{z})):

$$|d\hat{\mathbf{r}}|^2 = d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij} dz^i dz^j. \quad (8.3)$$

Поэтому иными будут как расстояния вдоль координатных линий $d\hat{s}_i \neq ds_i$, так и углы между $\hat{\mathbf{e}}_i$ и $\hat{\mathbf{e}}_j$. Именно различие этих шести величин определяет деформацию в бесконечно малой окрестности материальной точки $M \in D$.

В соответствии с формулами преобразования контравариантных компонент (1.22) имеем

$$dz^i = \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} dy^\alpha, \quad dz^j = \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta} dy^\beta, \quad dy^\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i} dz^i, \quad dy^\beta = \frac{\partial y_\beta}{\partial z_j} dz^j$$

Тогда либо

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 - ds^2 &= \hat{g}_{ij} dz^i dz^j - g_{ij} dy^i dy^j = \\ &= (\hat{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial z_\beta}{\partial y_j} - g_{ij}) dy^i dy^j = (\bar{g}_{ij} - g_{ij}) dy^i dy^j, \end{aligned} \quad (8.4)$$

либо

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 - ds^2 &= \hat{g}_{ij} dz^i dz^j - g_{ij} dy^i dy^j = \\ &= \left(\hat{g}_{ij} - g_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i} \frac{\partial y_\beta}{\partial z_j} \right) dz^i dz^j = (\hat{g}_{ij} - \tilde{g}_{ij}) dz^i dz^j. \end{aligned} \quad (8.5)$$

В (8.4) определен симметричный ковариантный тензор ранга два $\hat{\mathcal{E}}$ – тензор конечных деформаций Грина, а в (8.5) – тензор конечных деформаций Альманси $\tilde{\mathcal{E}}$, так что

$$2\hat{\varepsilon}_{ij} = \bar{g}_{ij} - g_{ij}, \quad \hat{\mathcal{E}} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j), \quad (8.6)$$

$$2\tilde{\varepsilon}_{ij} = \hat{g}_{ij} - \tilde{g}_{ij}, \quad \tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\varepsilon}_{ij}(\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j). \quad (8.7)$$

Из (8.4), (8.6) вытекает, что

$$d\hat{s}^2 = ds^2 + 2\hat{\varepsilon}_{ij} dy^i dy^j.$$

Поэтому

$$\frac{d\hat{s}_i}{ds_i} = \sqrt{1 + \frac{2\hat{\varepsilon}_{ii}}{g_{ii}}}, \quad \text{по } i \text{ не суммировать.}$$

Следовательно, относительное удлинение l_i бесконечно малого линейного элемента ds_i вдоль \mathbf{e}_i после деформации равно

$$l_i = \frac{d\hat{s}_i - ds_i}{ds_i} = \sqrt{1 + \frac{2\hat{\varepsilon}_{ii}}{g_{ii}}} - 1. \quad (8.8)$$

Если φ_{ij} – угол между направлениями \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j , то в соответствии с (2.27)

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}, \quad \text{по } i, j \text{ не суммировать.}$$

Для $\cos \hat{\varphi}_{ij}$ в соответствии с (2.23), (2.26) и (8.4) получим

$$\cos \hat{\varphi}_{ij} = \frac{\hat{g}_{ij} dz^i dz^j}{d\hat{s}_i d\hat{s}_j} = \frac{g_{\alpha\beta} \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial z_\beta}{\partial y_j} dy^i dy^j}{\sqrt{\bar{g}_{ii}\bar{g}_{jj}} dy^i dy^j} = \frac{\bar{g}_{ij}}{\sqrt{\bar{g}_{ii}\bar{g}_{jj}}}.$$

Но по определению (8.6): $\bar{g}_{ij} = g_{ij} + 2\hat{\varepsilon}_{ij}$. Поэтому

$$\cos \hat{\varphi}_{ij} = \frac{g_{ij} + 2\hat{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{(g_{ii} + 2\hat{\varepsilon}_{ii})(g_{jj} + 2\hat{\varepsilon}_{jj})}}. \quad (8.9)$$

Итак, изменение шести величин: $ds_i, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ в результате деформации бесконечно малой окрестности материальной точки $M \in D$ полностью описывается в терминах ковариантных компонент (параметров) тензора $\hat{\mathcal{E}}$ (8.6). Отсутствие

деформации: $\hat{\mathcal{E}} = 0$ в силу (8.8), (8.9) приводит к $e_i = 0$ и $\varphi_{ij} = \hat{\varphi}_{ij}$. Этот вывод справедлив и при $\tilde{\mathcal{E}} = 0$.

Теперь предстоит сделать весьма существенное предположение. Именно, будем предполагать, что материальный объем D до деформации находится в евклидовом пространстве R^3 , а процесс деформации не выводит из этого пространства. Иными словами

$$D(\mathbf{y}) \subset R^3, \quad \hat{D}(\mathbf{z}) \subset R^3. \quad (8.10)$$

Это означает, что для (\mathbf{y}) и (\mathbf{z}) можно выбрать единую отсчетную систему координат (\mathbf{x}) . Если теперь \mathbf{r} – радиус-вектор материальной точки $M(\mathbf{y}) \in D$, до деформации, а $\hat{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор той же материальной точки $M(\mathbf{z}) \in \hat{D}$ после деформации, то базисы \mathbf{e}_i в D и $\hat{\mathbf{e}}_i$ в \hat{D} можно определить как естественные, т.е.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dy^i \longleftrightarrow \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i}, \quad d\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{e}}_i dz^i \longleftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial z_i} \quad (8.11)$$

Как уже неоднократно отмечалось, точное евклидово пространство R^3 можно отождествить с векторным пространством $V(\mathbf{w})$ и тогда в силу (8.10)

$$\mathbf{r} \in V(\mathbf{w}), \quad \hat{\mathbf{r}} \in V(\mathbf{w}).$$

Поэтому *существует* вектор $\mathbf{u} \in V(\mathbf{w})$ такой, что

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \longleftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{u}. \quad (8.12)$$

Следовательно, появляется возможность описать деформацию как отображение $(\mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{z})$ в терминах вектора перемещений \mathbf{u} . Предварительно приведем аналитическую формулировку условий (8.10). Эти формулировки предполагают простые, но достаточно громоздкие выкладки. Здесь они опущены, а приведены лишь нужные для понимания промежуточные и окончательные результаты.

Как уже отмечалось в § 4, условия (8.10) равносильны следующим

$$R_{ij\gamma}^{\dots m} = 0, \quad \hat{R}_{ij\gamma}^{\dots m} = 0, \quad (8.13)$$

где $R_{ij\gamma}^{\dots m}$, $\hat{R}_{ij\gamma}^{\dots m}$ – смешанные компоненты тензора Римана-Кристоффеля (4.37). Эти компоненты вычисляются с помощью (4.29) по известным $g_{\alpha\beta}$, $\hat{g}_{\alpha\beta}$. От (8.13) можно перейти (жонглирование индексами) к ковариантным компонентам и тогда

$$R_{ij\gamma m} = 0, \quad \hat{R}_{ij\gamma m} = 0, \quad (8.14)$$

Используемые в (8.14) компоненты задают ковариантный *тензор кривизны Римана*. Для этого тензора справедливы следующие свойства симметрии

$$\begin{aligned} R_{ij\gamma m} = -R_{ji\gamma m} \longrightarrow R_{ii\gamma m} = 0, \quad R_{ij\gamma m} = -R_{ijm\gamma} \longrightarrow R_{ij,\gamma\gamma} = 0, \\ R_{ij\gamma m} = R_{\gamma mij}, \quad R_{ij\gamma m} + R_{imj\gamma} + R_{i\gamma mj} = 0. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Тензор кривизны в R^n имеет n^4 компонент, которые связаны соотношениями (8.15). Простой подсчет показывает, что все n^4 компонент могут быть выражены через $N(n) = n^2(n^2 - 1)/12$ "независимых" компонент. Для $n = 2$ $N(2) = 1$, а $N(3) = 6$. Эти шесть компонент в R^3 можно каким либо образом зафиксировать. Для отличных от нуля компонент $R_{ij\gamma m}$ в силу (8.15) имеем

$$\begin{aligned} R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \\ R_{2323} = -R_{3223} = -R_{2332} = R_{3232} \\ R_{3131} = -R_{1331} = -R_{3113} = R_{1313} \\ R_{1213} = -R_{2113} = -R_{1321} = R_{1312} = R_{3121} = R_{2131} \\ R_{2321} = -R_{3221} = -R_{2132} = R_{2123} = R_{1232} = R_{3212} \\ R_{3132} = -R_{1332} = -R_{3213} = R_{3231} = R_{2313} = R_{1323}. \end{aligned} \quad (8.15')$$

Поэтому достаточно зафиксировать индексы первого столбца в только что приведенных соотношениях

$$ij\gamma m : 1212, 2323, 3131, 1213, 2321, 3132. \quad (8.16)$$

В первом уравнении (8.14) используется метрика g_{ij} , во втором — \hat{g}_{ij} . Связь между ними и $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ задают соотношения (8.6), (8.7). Поэтому от (8.14) можно перейти либо к

$$\tilde{R}_{ij\gamma m} - R_{ij\gamma m} = 0, \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + 2\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \quad (8.17)$$

либо к

$$\hat{R}_{ij\gamma m} - \tilde{R}_{ij\gamma m} = 0, \quad \tilde{g}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta} + 2\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}. \quad (8.18)$$

Из (8.17) и (4.37) окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}_{im}}{\partial y_j \partial y_\gamma} + \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}_{j\gamma}}{\partial y_i \partial y_m} - \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}_{jm}}{\partial y_i \partial y_\gamma} - \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}_{i\gamma}}{\partial y_j \partial y_m} + 2\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\Gamma_{mi}^\beta \Gamma_{\gamma j}^\alpha - \Gamma_{i\gamma}^\beta \Gamma_{mj}^\alpha) + \\ + 2(\Gamma_{j\gamma}^\beta N_{im\beta} + \Gamma_{mi}^\beta N_{j\gamma\beta} - \Gamma_{jm}^\beta N_{i\gamma\beta} - \Gamma_{i\gamma}^\beta N_{jm\beta}) = 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Здесь

$$2N_{j\gamma\beta} = \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{\gamma\beta}}{\partial y_j} + \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{\beta j}}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{j\gamma}}{\partial y_\beta},$$

$$ij\gamma m : 1212, 2323, 3131, 1213, 2321, 3132,$$

а символы Кристоффеля второго рода Γ_{mj}^i вычисляются с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$ из (4.29). Если же вместо (8.17) исходить из (8.18), то в (8.19) следует заменить (\mathbf{y}) на (\mathbf{z}) , $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ на $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, а символы Кристоффеля вычислять с помощью метрики $\hat{g}_{\alpha\beta}$.

Остается добавить, что для (8.10) условия совместности деформаций (8.19) являются необходимыми и достаточными. Иногда о (8.19) говорят и как об условиях сплошности деформаций. Последнее название обычно связывают с существованием векторного поля перемещений \mathbf{u} из (8.12).

Итак, пусть

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \longleftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i}, \quad \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial z_i}. \quad (8.20)$$

Из (8.20) получаем

$$\mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial y_i} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i} = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i}. \quad (8.21)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial z_\beta}{\partial y_j} = \bar{g}_{ij} = \left(\mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \right) = \\ = g_{ij} + \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} + \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \end{aligned}$$

или

$$\bar{g}_{ij} - g_{ij} = 2\hat{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} + \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}. \quad (8.22)$$

По определению (4.7):

$$\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u_i, \quad \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} = \nabla_i u_j. \quad (8.23)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} = \nabla_i u_m \mathbf{e}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_i u_m \nabla_j u^m. \quad (8.24)$$

Подстановка (8.23), (8.24) в (8.22) дает

$$2\hat{\varepsilon}_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_m \nabla_j u^m. \quad (8.25)$$

Сравнение с (7.6) показывает, что в (8.25) определен тензор конечных деформаций Грина, представленный в локальной криволинейной системе координат (\mathbf{y}) с естественным базисом (8.20). Если вместо (8.21) воспользоваться соотношением

$$\hat{\mathbf{e}}_i - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_i} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i}, \quad (8.26)$$

то предыдущие рассуждения приводят к тензору конечных деформаций Альманси (7.7) в локальной криволинейной системе координат (\mathbf{z}) с естественным базисом (8.20):

$$2\tilde{\varepsilon}_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \nabla_i u_m \nabla_j u^m. \quad (8.27)$$

Особо следует отметить, что помимо знака перед квадратичными членами, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ отличается от $\hat{\varepsilon}_{ij}$ и определением ковариантной производной, ибо в (8.27) вместо (8.23) положено

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_i} = \nabla_j u_i, \quad \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_i} = \nabla_i u_j. \quad (8.28)$$

Также следует отметить, что соотношения (8.25) (или (8.27)) для ковариантных компонент тензора деформации $\hat{\mathcal{E}}$ (или $\tilde{\mathcal{E}}$) справедливы только тогда, когда существует вектор перемещений \mathbf{u} . В то же время $\hat{\mathcal{E}}$ (или $\tilde{\mathcal{E}}$) определяется только метриками $\hat{g}_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$, независимо от предположения о существовании \mathbf{u} . Можно показать, что при $\hat{\varepsilon}_{ij}$ из (8.25) условия совместности деформаций (8.19) удовлетворяются тождественно, поэтому соотношениями (8.25) заданы интегралы уравнений совместности деформаций (8.19), т.е. общие решения этих уравнений, зависящие от трех "произвольных" функций u_i . Необходимые разъяснения относительно меры такой "произвольности" будут даны ниже при рассмотрении *геометрически линейных моделей* упругой сплошной среды.

С формальной точки зрения такая среда характеризуется предположениями (7.23). При деформации $D(\mathbf{y}) \rightarrow \hat{D}(\mathbf{z})$ и $S(\mathbf{y}) \rightarrow \hat{S}(\mathbf{z})$. Существенно, как будет показано ниже, что при этом должна сохраняться *ориентация*, т.е. деформации типа инверсии следует каким-либо способом исключить. В конкретных задачах динамики или статики \hat{S} – поверхность деформируемого тела, на которой задаются граничные условия (7.29). Эта поверхность заранее неизвестна (приятным исключением являются задачи с краевым условием (7.29a)) и должна определяться в процессе решения исходной задачи. В предположениях (7.23): $z_i \simeq y_i$, поэтому, в частности, $\hat{S}(\mathbf{z}) \simeq S(\mathbf{y})$. Следовательно, пренебрегая величинами второго порядка малости, можно считать, что граничные условия (7.29) выполняются на недеформированной (известной) границе S . Далее, в тех же предположениях (7.23) можно считать, что

$$\mathbf{r} = y_i \mathbf{e}_i \simeq z_i \mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{r}} = z_i \hat{\mathbf{e}}_i.$$

Поэтому с той же степенью точности можно не различать операторы ковариантного дифференцирования в (8.25) и в (8.27). И, наконец, предположения (7.23) позволяют как в (8.25), так и в (8.27) пренебречь квадратичными по $|\mathbf{u}|$ членами. Тем самым мы приходим к *тензору малых деформаций* \mathcal{E} (сравни с (7.14)):

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (8.29)$$

Для этого тензора существенно упрощаются условия совместности деформаций (8.19) и мы приведем здесь их вывод. Сами условия (8.19) будем интерпретировать как необходимые для существования вектора перемещений \mathbf{u} . Именно в этой связи рассмотрим классическую задачу об определении вектора \mathbf{u} по известному тензору малых деформаций \mathcal{E} (8.29).

Введем в рассмотрение ковариантный кососимметричный (антисимметричный) тензор ранга два

$$2\omega_{ij} = \nabla_j u_i - \nabla_i u_j, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}. \quad (8.30)$$

Этому тензору (см. (4.48)) соответствует вектор $2\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ с ковариантными компонентами

$$\omega_1 = \omega_{23} = -\omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{31} = -\omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{12} = -\omega_{21}.$$

Соотношения (8.29), (8.30) дают

$$\nabla_j u_i = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (8.31)$$

Теперь заметим, что в силу (7.32)

$$\mathbf{u}(\mathbf{y} + d\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} dy^j + O(\delta^2).$$

Поэтому

$$du_\alpha \mathbf{e}^\alpha = d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} dy^j = \frac{\partial}{\partial y_j} (u^i \mathbf{e}_i) dy^j.$$

По определению (4.7):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} (u^i \mathbf{e}_i) = \nabla_j u^i \mathbf{e}_i.$$

Следовательно,

$$du_i = \nabla_j u_i dy^j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dy^j. \quad (8.32)$$

Совершенно аналогично

$$d\omega_i = \nabla_j \omega_i dy^j. \quad (8.33)$$

Если теперь учесть (8.31), (8.32) и (4.48), то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u_i \mathbf{e}^i = \varepsilon_{ji} \mathbf{e}^i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_j. \quad (8.34)$$

Итак, если известен тензор ω_{ij} (или вектор $\boldsymbol{\omega}$), то вектор перемещений \mathbf{u} определяется либо с помощью квадратур

$$u_i(M) = u_i(M_0) = \int_{M_0}^M (\varepsilon_{i\alpha} + \omega_{i\alpha}) d\xi^\alpha, \quad (8.35)$$

либо, что в сущности одно и то же, интегрированием системы уравнений (8.34).

Как известно, необходимые условия интегрируемости системы (8.34) задаются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha}(\varepsilon_{ji}\mathbf{e}^i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_j) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\varepsilon_{\alpha i}\mathbf{e}^i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\alpha),$$

которые в покомпонентной записи имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla_3(\varepsilon_{i2} + \omega_{i2}) - \nabla_2(\varepsilon_{i3} + \omega_{i3}) &= 0, \\ \nabla_1(\varepsilon_{i3} + \omega_{i3}) - \nabla_3(\varepsilon_{i1} + \omega_{i1}) &= 0, \\ \nabla_2(\varepsilon_{i1} + \omega_{i1}) - \nabla_1(\varepsilon_{i2} + \omega_{i2}) &= 0. \end{aligned} \quad (8.36)$$

При заданном векторе $\boldsymbol{\omega}$ формулы (8.35) дают решение задачи об определении \mathbf{u} по \mathcal{E} в том случае, когда интеграл в (8.35) не зависит от пути интегрирования M_0M . Последнее возможно лишь тогда, когда du_i из (8.32) является полным дифференциалом. Необходимые условия полного дифференциала $d\mathbf{u} = du_i\mathbf{e}^i$ сводятся к (8.36).

Девять соотношений (8.36) содержат шесть компонент $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ и три компоненты ω_m . Исключение ω_m из (8.36) должно привести (и приводит!) к *шести* условиям, связывающим ε_{ij} (*условия совместности деформаций*). Далее мы покажем, что независимо от способа исключения ω_m из (8.36) шесть условий совместности деформаций определяются однозначно.

Как мы убедились, первоначальная задача о нахождении \mathbf{u} по \mathcal{E} свелась к задаче о нахождении $\boldsymbol{\omega}$ по \mathcal{E} . По определению (4.7)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial y_j} = \nabla_j \omega_m \mathbf{e}^m. \quad (8.37)$$

Необходимыми условиями интегрируемости системы (8.37) являются

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(\nabla_\alpha \omega_m \mathbf{e}^m) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}(\nabla_j \omega_m \mathbf{e}^m). \quad (8.38)$$

Соотношения (8.38) совпадают с условиями полного дифференциала $d\boldsymbol{\omega}$:

$$d\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\omega} \mathbf{e}^m, \quad d\omega_m = \nabla_j \omega_m dy^j, \quad m = 1, 2, 3.$$

Выпишем эти условия

$$\begin{aligned} \nabla_2 \nabla_3 \omega_m &= \nabla_3 \nabla_2 \omega_m, & \nabla_3 \nabla_1 \omega_m &= \nabla_1 \nabla_3 \omega_m, \\ \nabla_1 \nabla_2 \omega_m &= \nabla_2 \nabla_1 \omega_m, & m &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Но, как нетрудно проверить,

$$\nabla_\alpha \omega_{km} = \nabla_m \varepsilon_{k\alpha} - \nabla_k \varepsilon_{\alpha m}. \quad (8.40)$$

Соотношения (8.40) вместе с $\omega_1 = \omega_{23}$, $\omega_2 = \omega_{31}$, $\omega_3 = \omega_{12}$ позволяют записать условия (8.39) в терминах ковариантных компонент тензора малых деформаций \mathcal{E} . Итак, при $m = 1$ из (8.39), (8.40) имеем

$$2\nabla_2 \nabla_3 \varepsilon_{23} = \nabla_3 \nabla_3 \varepsilon_{22} + \nabla_2 \nabla_2 \varepsilon_{33}, \quad (1)$$

$$\nabla_3 \nabla_3 \varepsilon_{21} + \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{33} = \nabla_1 \nabla_3 \varepsilon_{23} + \nabla_3 \nabla_2 \varepsilon_{13}, \quad (2)$$

$$\nabla_2 \nabla_2 \varepsilon_{13} + \nabla_1 \nabla_3 \varepsilon_{22} = \nabla_2 \nabla_3 \varepsilon_{21} + \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{23}. \quad (3)$$

Аналогично при $m = 2$

$$\nabla_3 \nabla_3 \varepsilon_{21} + \nabla_2 \nabla_1 \varepsilon_{33} = \nabla_3 \nabla_1 \varepsilon_{32} + \nabla_2 \nabla_3 \varepsilon_{31}, \quad (4)$$

$$2\nabla_1 \nabla_3 \varepsilon_{31} = \nabla_1 \nabla_1 \varepsilon_{33} + \nabla_3 \nabla_3 \varepsilon_{11}, \quad (5) \quad (8.41)$$

$$\nabla_1 \nabla_1 \varepsilon_{32} + \nabla_2 \nabla_3 \varepsilon_{11} = \nabla_2 \nabla_1 \varepsilon_{31} + \nabla_1 \nabla_3 \varepsilon_{21}. \quad (6)$$

И, наконец, (8.39), (8.40) при $m = 3$ дают

$$\nabla_2 \nabla_2 \varepsilon_{13} + \nabla_3 \nabla_1 \varepsilon_{22} = \nabla_3 \nabla_2 \varepsilon_{12} + \nabla_2 \nabla_1 \varepsilon_{32}, \quad (7)$$

$$\nabla_1 \nabla_1 \varepsilon_{32} + \nabla_3 \nabla_2 \varepsilon_{11} = \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{13} + \nabla_3 \nabla_1 \varepsilon_{12}, \quad (8)$$

$$2\nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{12} = \nabla_1 \nabla_1 \varepsilon_{22} + \nabla_2 \nabla_2 \varepsilon_{11}. \quad (9)$$

Поскольку $\nabla_i \nabla_j (\cdot) = \nabla_j \nabla_i (\cdot)$ (евклидовость!) и $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, то в (8.41) *совпадают* соотношения: (2) и (4), (3) и (7), (6) и (8). Конкретный выбор тройки (2), (3), (6) или (4), (7), (8) не имеет существенного значения. Поэтому за условия совместности малых деформаций можно принять (см. также (8.15')):

$$\begin{aligned} \nabla_j \nabla_m \varepsilon_{ik} - \nabla_i \nabla_m \varepsilon_{kj} - \nabla_j \nabla_k \varepsilon_{im} + \nabla_i \nabla_k \varepsilon_{mj} &= 0 \\ ikjm : 1213, 2323, 3131, 1213, 3132, 2321. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Условия (8.42) являются также и достаточными для интегрируемости уравнений (8.37). Поэтому существует вектор ω , для компонент которого выполнено (8.40). Но тогда превращаются в тождества соотношения (8.36) – условия полного дифференциала $d\mathbf{u}$. Действительно, в силу (8.40) для первого соотношения (8.36) будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla_3 (\varepsilon_{i2} + \omega_{i2}) - \nabla_2 (\varepsilon_{i3} + \omega_{i3}) &= \nabla_3 \varepsilon_{i2} - \nabla_2 \varepsilon_{i3} + \nabla_3 \omega_{i2} - \nabla_2 \omega_{i3} = \\ &= \nabla_3 \varepsilon_{i2} - \nabla_2 \varepsilon_{i3} + \nabla_2 \varepsilon_{i3} - \nabla_i \varepsilon_{32} - \nabla_3 \varepsilon_{i2} + \nabla_i \varepsilon_{23} = 0. \end{aligned}$$

Проверка тождественности двух оставшихся соотношений (8.36) проводится аналогично.

Если выполнены условия (8.42), то мы имеем все необходимое, чтобы представить решение задачи об определении вектора перемещений \mathbf{u} по тензору малых деформаций \mathcal{E} в явном виде. Пусть $d\xi^j = -d(y_j - \xi_j)$. Тогда формула интегрирования по частям дает

$$\int_{M_0}^M \omega_{ij} d\xi^j = \omega_{ij}(M_0)(y_i - y_j^0) + \int_{M_0}^M \nabla_\alpha \omega_{ij}(y_i - \xi_j) d\xi^\alpha.$$

Теперь следует учесть (8.40), чтобы из (8.35) получить *формулы Чезаро*:

$$\begin{aligned} u_i(M) &= u_i(M_0) + \omega_{ij}(M_0)(y_j - y_j^0) + \\ &+ \int_{M_0}^M [\varepsilon_{i\alpha} + (y_j - \xi_j)(\nabla_j \varepsilon_{i\alpha} - \nabla_i \varepsilon_{\alpha j})] d\xi^\alpha. \end{aligned} \quad (8.43)$$