

ВОПРОСЫ К ПИСЬМЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ

1°. Определение внешней меры. Примеры. Определение измеримости по Каратеодори. Совокупность μ -измеримых множеств образуют σ -алгебру.

Определения измеримости по Лебегу и по Каратеодори эквивалентны.

Свойства внешней меры на измеримых подмножествах.

Критерий Каратеодори измеримости борелевских множеств в метрическом пространстве.

Теорема об исчерпывании борелевских множеств. Следствия.

Меры Хаусдорфа. Свойства меры Хаусдорфа. $\mathcal{H}_\delta^k, \mathcal{H}^k$ — внешние меры. Теорема о регулярности меры Хаусдорфа.

Изодиаметрическое неравенство.

Теорема Витали (без доказательства). Теорема о совпадении мер Лебега и Хаусдорфа. Лемма о множествах нулевой меры Хаусдорфа. Определение размерности по Хаусдорфу.

Липшицевы и билипшицевы отображения. Соотношение мер Хаусдорфа образа и прообраза при этих отображениях. Примеры, случай функции класса C^1 (лемма).

Определитель Грама. Лемма об искажении меры Хаусдорфа при линейном отображении.

Лемма о касательном отображении. Лемма о локальном искажении меры. Лемма о равномерной сходимости интеграла от Якобиана.

Формула площади без случая вырождения.

Лемма о вырождении. Примеры применения формулы площади для тела вращения и графика функции. Теорема Бине-Коши (без доказательства).

Формула замены переменных переменных.

Интеграл Лебега в сферической системе координат. Площадь поверхности сферы и объем шара в R^n .

Формула коплощади. (Лемма1, Лемма2, сама формула, примеры)

Внешние 1-формы, 2-формы, k -формы. Базисные формы. Операции сложения и умножения на скаляр. Размерность пространства внешних форм. Ориентация базисов.

Внешние одночлены, их внешнее произведение, его ассоциативность. Внешнее произведение k -форм и его ассоциативность.

Понятие внешней дифференциальной формы степени $r \geq 0$ на многообразии. Естественная дифференциальная структура на касательном расслоении.

Операции над дифференциальными формами. Координатное представление внешних дифференциальных форм.

Гладкие отображения открытых множеств пространства \mathbb{R}^n и индуцированные ими преобразования внешних форм. Свойства операции переноса.

Внешний дифференциал на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$ и его свойства. Независимость от выбора системы координат. Внешний дифференциал формы на многообразии.

Формула Пуанкаре. Перестановочность операций внешнего дифференцирования и переноса.

Форма Гаусса — замкнута и не точна. Интеграл от формы Гаусса по сфере.

Многообразие с краем. Определение, размерность границы, примеры. Ориентация и индуцирование. Примеры.

Лемма о выборе локальных базисов. Лемма о функции на ориентированном многообразии с краем.

Определение интеграла по многообразию размерности n от дифференциальной формы степени n в \mathbb{R}^n . Элементарная теорема Грина-Гаусса-Остроградского-Стокса-Пуанкаре.

Определение цепи. Обобщенная теорема Стокса-Пуанкаре интегрирования по цепи.

Общий случай теоремы Стокса-Пуанкаре.

Применение теоремы Стокса-Пуанкаре: формулы Грина, Стокса, Гаусса-Остроградского. Векторные поля и дифференциальные формы. Основные понятия векторного анализа: grad, rot, div.

Теорема Брауэра о неподвижной точке.

Точные и замкнутые формы. Вторая лемма Пуанкаре (с доказательством).

Понятие свертки, существование, оператор сдвига. Непрерывность, дифференцируемость свертки.

Определение Δ -образной последовательности. Примеры: ядро Стеклова, ядро Соболева. Теорема об аппроксимации 1.

Тригонометрическая и полиномиальная Δ -образные последовательности. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции полиномами.

Лемма о сглаживании индикатора. Теорема Титце-Урысона о продолжении.

Лемма о сходимости свертки суммируемой функции с Δ -образной последовательностью в \mathcal{L}_1 . Плотность C_0^∞ в \mathcal{L}_1 . Лемма Дю-Буа-Раймонда.

Лемма о разбиении единицы.

Понятие равностепенной непрерывности. Теорема Арцела-Асколи.

Асимптотическая формула Лапласа.

Формула Стирлинга.

Определение ортогональных систем. Примеры. Коэффициенты Фурье относительно ортогональной системы в пространстве со скалярным произведением. Неравенство Бесселя.

Полные системы и условие полноты ортогональной системы. Полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Теорема о сходимости в среднем. Равенство Парсеваля.

Лемма Римана — Лебега.

Ядро Дирихле, его свойства. Принцип локализации.

Условие Дини. Примеры. Достаточное условие сходимости ряда в точке. Примеры.

$$\text{Формула } \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Лемма о дифференцировании ряда Фурье. Изопериметрическое свойство шара.

Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье. Свойства преобразования Фурье. Примеры.

Преобразование Фурье и свертка. Формула умножения. Примеры.

Суммирование интеграла Фурье по Гауссу.

Инъективность преобразования Фурье.

Достаточные условия представимости функции ее интегралом Фурье.

Формула обращения. Теорема Планшереля.

Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье. Пространство быстроубывающих функций (свойства).

Полнота пространства L_p .

Непрерывность в среднем: для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ верно

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0, \quad \text{если } h \rightarrow 0.$$