

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## Ключевые понятия и теоремы 4-го семестра

Определение внешней меры. Примеры.  
Определение измеримости по Каратеодори.  
Связь с измеримостью по Лебегу.  
Свойства измеримых подмножеств.  
Критерий Каратеодори измеримости борелевских множеств в метрическом пространстве.  
Меры Хаусдорфа. Свойства меры Хаусдорфа.  
Теорема о регулярности меры Хаусдорфа. Размерность по Хаусдорфу.  
Изодиаметрическое неравенство.  
Связь между мерами Хаусдорфа и Лебега.  
Лемма о локальном искажении меры (определитель Грама как элемент площади поверхности).  
Формула площади.  
Длина кривой, площадь графика функции.  
Мера на многообразии.  
Площадь поверхности вращения.  
Формула коплощади.  
Интеграл Лебега в полярной системе координат.  
Средние по Стеклову и Соболеву.  
Гладкость средних функций с гладким ядром.  
Понятие свертки и ее свойства.  
Определение  $\Delta$ -образной последовательности. Примеры.  
Лемма о равномерном приближении.  
Теорема об аппроксимации единицы.  
Аппроксимационная теорема Вейерштрасса.  
Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами.  
Метод Лапласа для нахождения асимптотики представлений некоторых интегралов.  
Теорема об асимптотическом поведении.  
Формула Стирлинга.  
Внешние дифференциальные формы первой степени.  
Понятие интеграла формы первой степени вдоль гладкого пути. Примеры.  
Условие независимости интеграла от выбора пути, соединяющего данные точки. Примеры.  
Интегрирование форм первой степени. Свойства интеграла.  
Формула Грина.  
Понятие внешней дифференциальной формы степени  $r \geq 0$  на открытом множестве пространства  $\mathbb{R}^n$ .  
Форма Гаусса.  
Операции над дифференциальными формами.  
Координатное представление внешних форм.  
Внешнее произведение дифференциальных форм и его свойства.  
Внешний дифференциал и его свойства.  
Первая теорема Пуанкаре.  
Гладкие отображения открытых множеств пространства  $\mathbb{R}^n$  и индуцированные ими преобразования внешних форм.  
Понятие ориентации  $k$ -мерного многообразия в  $\mathbb{R}^n$ .  
Индукцированная ориентация края.

Элементарная формула Ньютона — Лейбница — Грина — Гаусса — Остроградского — Стокса.  
Определение  $k$ -мерного куска многообразия.  
 $k$ -мерная цепь.  
Граница цепи.  
Интегрирование по  $k$ -мерной цепи.  
Геометрический смысл операции внешнего дифференцирования (теорема о внешней производной).  
Формула Стокса — Пуанкаре.  
Понятие интеграла внешней формы по ориентированному дифференцируемому многообразию.  
Определение интеграла. Корректность определения.  
Признак интегрируемости.  
Свойства интеграла.  
Теорема Стокса на многообразиях.  
Векторные поля и дифференциальные формы. Основные понятия векторного анализа.  
Точные и замкнутые формы.  
Понятие звездной области.  
Вторая теорема Пуанкаре.  
Интеграл от формы Гаусса.  
Теорема Брауэра о неподвижной точке.  
Определение ортогональных систем. Примеры.  
Коэффициенты Фурье относительно ортогональной системы в пространстве со скалярным произведением.  
Неравенство Бесселя.  
Полные системы и условие полноты ортогональной системы.  
Полнота тригонометрической системы в  $L_2[-\pi, \pi]$ .  
Теорема о сходимости в среднем квадратичном. Равенство Парсеваля.  
Лемма Римана — Лебега.  
Ядро Дирихле, его свойства.  
Принцип локализации.  
Условие Дини. Примеры.  
Достаточное условие сходимости ряда в точке. Примеры.  
Лемма о дифференцировании ряда Фурье. Изопериметрическое свойство круга.  
Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье.  
Свойства преобразования Фурье. Примеры.  
Достаточные условия представимости функции ее интегралом Фурье.  
Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье.  
Пространство быстроубывающих функций (свойства).  
Формула обращения.  
Равенство Парсеваля.  
Теорема Планшереля.  
Преобразование Фурье и свертка.