1. Внешние меры и измеримые множества

Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное множество и $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ — совокупность всех его подмножеств.

1.1. Определение. Отображение $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ называется *внешней мерой* на $\mathbb{X}$, если

1) $\mu(\emptyset) = 0$,

2) $\mu(A) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ для любых множеств $A, A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $A \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Второе свойство называют свойством *счетной полуаддивности* внешней меры.

1.2. Свойство. *Внешняя мера всегда монотонна, т. е., $\mu(A) \leq \mu(B)$ для всех множеств $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ таких, что $A \subset B$.*

Это утверждение вытекает из свойства 2 внешней меры, если положить $B = A_1$, а $A_i = \emptyset$ для всех $i > 1$.

1.3. Пример. Напомним, что совокупность k-мерных сегментов в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, образует дробящуюся систему. Если $T = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_k, b_k\rangle$ — k-мерный сегмент, то его k-мерная мера Лебега равна $|T| = \prod\limits_{i=1}^{k}(b_i - a_i)$.

Внешняя мера Лебега $|\cdot|_e$ задается на любом подмножестве A евклидова пространства $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, равенством

$$|A|_e = \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} |A_i| : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big\},$$

где нижняя грань берется по всем объединениям $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ k-мерных сегментов A_i, содержащим множество A. Легко проверить, что внешняя мера Лебега множества A совпадает с интегральной нормой характеристической функции χ_A множества A.

Действительно, надо доказать, что

$$\inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} |A_i| : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big\} = \inf \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_n(x)\, dx,$$

где в левой части нижняя грань берется по всем покрытиям A k-мерными сегментами A_i, а в правой части — по всем монотонно возрастающим последовательностям неотрицательных ступенчатых функций таким, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \geq \chi_A(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^k$.

1) Для всякого покрытия $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ множества A определим последовательность $\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом: $\varphi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$. Очевидно $\varphi_n \geq 0$, последовательность φ_n, монотонно возрастает, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \geq \chi_A(x)$ и $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} |A_i| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_n(x)\,dx$. Отсюда $\|\chi_A\| \leq |A|_e$ (при определении $|A|_e$ нижняя грань берется по более узкому множеству).

2) С другой стороны, если $\|\chi_A\| < \infty$, то по доказываемой ниже лемме 1.23 для любого положительного ε существует открытое множество U такое, что $A \subset U$ и $\|\chi_U\| \leq \|\chi_A\| + \varepsilon$. Отсюда имеем

$$|A|_e \leq |U|_e \leq \|\chi_U\| \leq \|\chi_A\| + \varepsilon.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для любого открытого множества U существует последовательность $\{Q_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, дизъюнктных кубов $Q_i \subset U$ такая, что $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i = U$ (см. ниже свойство 3.1). Поэтому по теореме Беппо Леви имеем

$$|U|_e \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |Q_i| = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^{n} \chi_{Q_i}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \chi_U(x)\,dx = \|\chi_U\|.$$

Так как ε — произвольное положительное число, то равенство $\|\chi_A\| = |A|_e$ доказано.

Из свойств интегральной нормы вытекает, что для внешней меры Лебега выполняются все свойства внешней меры определения 1.1.

Отметим разницу в обозначениях: символ $|A|_e$ обозначает внешнюю меру Лебега множества A, в то время как символ $|A|$ обозначает меру Лебега измеримого множества A. Ясно, что $|A|_e = |A|$, если множество A измеримо, однако, это равенство не имеет никакого смысла, если множество A неизмеримо. Это соглашение контрастирует с применением символа $\mathcal{H}$ для вводимой ниже внешней меры Хаусдорфа, так как он один и тот же как для измеримого, так и для неизмеримого множества.

1.4. Определение. Множество $A \subset \mathbb{X}$ называется *μ-измеримым* (*измеримым относительно меры μ или измеримым по Каратеодори*), если

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$$

для всех множеств $F \subset \mathbb{X}$.

1.5. Замечание. *Поскольку для любых двух множеств F, $A \subset \mathbb{X}$ справедливо равенство $F = (F \cap A) \cup (F \setminus A)$, то в силу счетной полуаддитивности внешней меры μ всегда выполнено неравенство $\mu(F) \le \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$. Поэтому для того, чтобы доказать измеримость множества A, достаточно проверить выполнение неравенства $\mu(F) \ge \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$ для всех $F \subset \mathbb{X}$.*

Напомним, что множество $A \subset \mathbb{R}^k$ называется измеримым по Лебегу, если его характеристическая функция измерима.

1.6. Предложение. *Измеримость множества $A \subset \mathbb{R}^k$ по Лебегу влечет его измеримость по Каратеодори.*

Доказательство. Пусть $B \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное множество, интегральная норма характеристической функции которого конечна. Покажем, что для любой возрастающей последовательности $\{g_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, неотрицательных измеримых на $\mathbb{R}^k$ функций такой, что

$$\chi_B(x) \le \lim_{i\to\infty} g_i(x)$$

для почти всех x, вытекает соотношение

$$|B|_e \le \lim_{i\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} g_i \, d\mu.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда правая часть этого соотношения конечна. Действительно, полагая $g(x) = \lim\limits_{i\to\infty} g_i(x)$, по теореме Беппо Леви имеем

$$|B|_e = \|\chi_B\| \le \|g\| = \int\limits_{\mathbb{R}^k} g \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} g_i \, d\mu.$$

Пусть A — измеримое по Лебегу множество, а $F \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное множество, внешняя мера которого конечна. Тогда для любого

$\varepsilon > 0$ существует такая возрастающая последовательность неотрицательных ступенчатых функций φ_l, что

$$\chi_F(x) \le \sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi_l(x),$$

а

$$\sup_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_l\, d\mu \le \|\chi_F\| + \varepsilon.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_l\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_l \cdot \chi_A\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_l \cdot (1-\chi_A)\, d\mu.$$

Отсюда имеем

$$\|\chi_F\| + \varepsilon \ge \lim_{l\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_l \cdot \chi_A\, d\mu + \lim_{l\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_l \cdot (1-\chi_A)\, d\mu$$
$$\ge \|\chi_{F\cap A}\| + \|\chi_{F\setminus A}\|.$$

Следовательно, в силу произвольности ε получаем

$$|F|_e \ge |F\cap A|_e + |F\setminus A|_e$$

для произвольного множества F. Таким образом, множество A измеримо по Каратеодори.

1.7. Замечание. *Справедливо также и обратное к предложению* 1.6 *утверждение, см. ниже предложение* 1.21.

1.8. Определение. Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$ называется *σ-алгеброй*, если $\mathbb{X} \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ замкнуто относительно дополнения и счетного объединения, т. е.,

1) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \setminus B \in \mathcal{F}$,
2) если $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Символ $\bigsqcup\limits_i A_i$ используется далее для объединения дизъюнктных множеств.

1.9. Теорема. *Если μ — внешняя мера на совокупности $\mathcal{P}(\mathbb{X})$, то набор μ-измеримых по Каратеодори множеств образует σ-*алгебру.

Доказательство. 1) $\mathbb{X}$ измеримо. Действительно, поскольку $F \cap \mathbb{X} = F$ и $F \setminus \mathbb{X} = \emptyset$, то $\mu(F) = \mu(F \cap \mathbb{X}) + \mu(F \setminus \mathbb{X})$ для любого множества $F \subset \mathbb{X}$.

2) Если A измеримо, то дополнение $A^c = \mathbb{X} \setminus A$ к A также измеримо. В самом деле, для произвольного множества $F \subset \mathbb{X}$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(F \cap A^c) + \mu(F \setminus A^c) &= \mu(F \setminus A) + \mu(F \cap (A^c)^c) \\ &= \mu(F \setminus A) + \mu(F \cap A) = \mu(F). \end{aligned}$$

3) Пусть множества A и B измеримы. Тогда их объединение также измеримо. Действительно,

$$\begin{aligned} &\mu(F \cap (A \cup B)) + \mu(F \setminus (A \cup B)) \\ &\quad = \mu(F \cap (A \cup B)) + \mu(F \cap (A \cup B)^c) \\ &\quad = \mu((F \cap A) \cup (F \cap B)) + \mu(F \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad = \mu((F \cap A \cap B^c) \cup (F \cap A \cap B) \cup (F \cap A^c \cap B)) + \mu(F \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad \le \mu(F \cap A \cap B^c) + \mu(F \cap A \cap B) + \mu(F \cap A^c \cap B) + \mu(F \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad = \mu(F \cap A) + \mu(F \cap A^c) = \mu(F). \end{aligned}$$

Отсюда по индукции получаем, что объединение конечного числа измеримых множеств также измеримо.

Пусть теперь множества A_i, $i \in \mathbb{N}$, измеримы. Покажем, что

$$\mu\Big(F \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) + \mu\Big(F \cap \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big)^c\Big) \le \mu(F).$$

Без ограничения общности считаем, что A_i — дизъюнктная система, так как в противном случае можно рассмотреть множества $B_j = A_j \setminus \bigcup\limits_{i<j} A_i, B_1 = A_1$. Тогда $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ — дизъюнктная система, причем $\bigsqcup\limits_{j \in \mathbb{N}} B_j = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} &\mu\Big(F \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) + \mu\Big(F \cap \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big)^c\Big) \\ &\qquad \le \mu\Big(F \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + \mu\Big(F \cap \Big(\bigcup_{i>n} A_i\Big)\Big) + \mu\Big(F \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)^c\Big) \\ &\qquad\qquad = \mu(F) + \mu\Big(F \cap \Big(\bigcup_{i>n} A_i\Big)\Big) \le \mu(F) + \sum_{i>n} \mu(F \cap A_i). \end{aligned}$$

Осталось показать, что $\sum\limits_{i>n} \mu(F \cap A_i) \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого докажем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(F \cap A_i) \le \mu(F)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\mu(F) &= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_1^c) \\ &= \mu(F \cap A_1) + \mu((F \cap A_1^c) \cap A_2) + \mu((F \cap A_1^c) \cap A_2^c) \\ &= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_2) + \mu(F \cap A_1^c \cap A_2^c) \\ &= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_2) + \mu((F \cap A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3) \\ &+ \mu((F \cap A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3^c) = \ldots\end{aligned}$$

(Здесь использовано то, что $\mu((F \cap A_1^c) \cap A_2) = \mu(F \cap A_2)$ ввиду дизъюнктности системы $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$).

По индукции получаем требуемое: $\mu(F) \ge \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(F \cap A_i)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $\sum\limits_{i>n} \mu(F \cap A_i) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\mu\Big(F \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) + \mu\Big(F \cap \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big)^c\Big) \le \mu(F)$$

для произвольного множества $F \subset \mathbb{X}$. Следовательно, измеримость объединения $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ доказана.

Таким образом, измеримые по Каратеодори множества образуют σ-алгебру, что и требовалось доказать.

1.10. Определение. Неотрицательная функция множества μ, определенная на некоторой σ-алгебре $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$, называется *счетно-аддитивной функцией множества (или мерой) на* $\mathcal{F}$, если

1) μ монотонна: из $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{F}$, вытекает $\mu(A) \le \mu(B)$;

2) $\mu\big(\bigsqcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i\big) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ для любой счетной дизъюнктной системы множеств $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$.

1.11. Теорема (свойства измеримых множеств). *Пусть μ — внешняя мера на совокупности $\mathcal{P}(\mathbb{X})$, $\{A_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, — последовательность μ-измеримых множеств. Тогда*

1) $\mu\Big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Таким образом, внешняя мера счетно-аддитивна на совокупности μ-измеримых множеств.

2) *Если* $A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \ldots$, *то* $\lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

3) *Если* $A_1 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \ldots$ *и* $\mu(A_l) < \infty$ *для некоторого* $l \in \mathbb{N}$, *то* $\lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

Доказательство. 1) Полагая в определении 1.4 $F = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A = A_1$, имеем $\mu\Big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu(A_1) + \mu\Big(\bigsqcup\limits_{i>1} A_i\Big)$. Отсюда по индукции получим $\mu\Big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \mu\Big(\bigsqcup\limits_{i>n} A_i\Big) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mu\Big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Обратное неравенство вытекает из свойства счетной полуаддитивности.

2) Поскольку $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)\Big)$, то из первого пункта следует $\mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu(A_1) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_{i+1} \setminus A_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$, что и требовалось.

3) Это свойство вытекает из второго пункта, так как $A_1 \setminus A_i \subset A_1 \setminus A_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и поэтому $\mu(A_1) - \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_i) = \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i)\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

1.12. Замечание. *Отметим, что свойства* 2 *и* 3 *сформулированной теоремы справедливы также и для счетно-аддитивной функции множества (меры), определенной на некоторой* σ*-алгебре.*

1.13. Задача. Привести контрпример к третьему пункту теоремы в случае, когда условие $\mu(A_l) < \infty$ не выполнено ни для какого $l \in \mathbb{N}$.

1.14. Определение. Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — метрическое пространство. Множества $A, B \subset \mathbb{X}$ называются *удаленными*, если

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x,y} \{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\} > 0.$$

1.15. Определение. Внешняя мера μ *аддитивна на удаленных множествах*, если $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых двух удаленных множеств $A, B \subset \mathbb{X}$.

1.16. Задача. Показать, что внешняя мера Лебега аддитивна на удаленных множествах.

1.17. Критерий Каратеодори. *Пусть $\mathbb{X}$ — метрическое пространство и внешняя мера μ является аддитивной на удаленных множествах. Тогда μ — борелевская мера, т. е., все борелевские множества μ-измеримы по Каратеодори. Другими словами, σ-алгебра μ-измеримых множеств содержит σ-алгебру борелевских множеств.*

Доказательство. Достаточно доказать, что все замкнутые множества μ-измеримы (тогда для произвольного борелевского множества это утверждение следует из теоремы 1.9).

Рассмотрим замкнутое множество C и докажем, что для всякого множества F справедливо неравенство

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C).$$

Если $\mu(F) = \infty$, то неравенство очевидно. Рассмотрим случай, когда $\mu(F) < \infty$.

Определим множества

$$D_0 = \{x \in \mathbb{X} : \operatorname{dist}(x, C) > 1\}$$

и

$$D_n = \Big\{x \in \mathbb{X} : \frac{1}{2^n} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\Big\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Множества D_n, $n \in \mathbb{N}$, образуют дизъюнктную систему. Очевидно, что системы $\{D_{2j}\}$ и $\{D_{2j+1}\}$, $j \in \mathbb{N}$, состоят из удаленных множеств. Отсюда следует, что D_i и D_j удалены, если $|i - j| > 1$.

Для всех $m \in \mathbb{N}$ в силу включений

$$F \supset F \cap \bigsqcup_{j=0}^{m} D_{2j} \ \text{ и } \ F \supset F \cap \bigsqcup_{j=0}^{m} D_{2j+1}$$

и монотонности меры справедливы неравенства

$$\mu(F) \geq \mu\Big(F \cap \bigsqcup_{j=0}^{m} D_{2j}\Big) \ \text{ и } \ \mu(F) \geq \mu\Big(F \cap \bigsqcup_{j=0}^{m} D_{2j+1}\Big).$$

Далее, так как

$$F \cap \bigsqcup_{j=0}^{m} D_{2j} = \bigsqcup_{j=0}^{m} (F \cap D_{2j}) \ \text{ и } \ F \cap \bigsqcup_{j=0}^{m} D_{2j+1} = \bigsqcup_{j=0}^{m} (F \cap D_{2j+1}),$$

то по свойству аддитивности меры μ на удаленных множествах получаем

$$\mu\Big(\bigsqcup_{j=0}^{m}(F\cap D_{2j})\Big)=\sum_{j=0}^{m}\mu(F\cap D_{2j})$$

и

$$\mu\Big(\bigsqcup_{j=0}^{m}(F\cap D_{2j+1})\Big)=\sum_{j=0}^{m}\mu(F\cap D_{2j+1}).$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu(F\cap D_j)$, члены которого неотрицательны, сходится, так как его частичные суммы ограничены сверху числом $2\mu(F)$.

Теперь заметим, что множества C и $\bigsqcup\limits_{i=0}^{m}D_i$ удалены при любом $m\in\mathbb{N}$. Докажем, что

$$\mu(F)\geq\mu\Big(\Big(F\cap\bigsqcup_{j=0}^{m}D_j\Big)\cup(F\cap C)\Big)=\mu(F\cap C)+\mu\Big(F\cap\bigsqcup_{j=0}^{m}D_j\Big)$$
$$\geq\mu(F\cap C)+\mu(F\cap C^c)-\sum_{j>m}\mu(F\cap D_j).\quad(1.1)$$

Действительно, так как $C^c=\bigsqcup\limits_{j\in\mathbb{N}}D_j=\bigsqcup\limits_{j=0}^{m}D_j\cup\bigsqcup\limits_{j>m}D_j$, то

$$\mu(F\cap C^c)\leq\mu\Big(F\cap\bigsqcup_{j=0}^{m}D_j\Big)+\mu\Big(F\cap\bigsqcup_{j>m}D_j\Big),$$

откуда и следует (1.1). Заметим, что правая часть (1.1) не зависит от m. Поскольку остаток $\sum\limits_{j>m}\mu(F\cap D_j)$ может быть сделан сколь угодно малым при подходящем выборе m, то

$$\mu(F)\geq\mu(F\cap C)+\mu(F\cap C^c).$$

Совокупность всех борелевских множеств метрического пространства $\mathbb{X}$ будем обозначать символом $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

1.18. Теорема об исчерпывании борелевских множеств. *Пусть $\mathbb{X}$ — метрическое пространство и $\mu:\mathcal{B}(\mathbb{X})\to[0,+\infty)$ — конечная счетно-аддитивная мера. Тогда для любого множества $A\subset\mathcal{B}(\mathbb{X})$ выполняется:*

(1) $\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C$ *замкнуто и* $C \subset A\}$ *и*
(2) $\mu(A) = \inf\{\mu(C) : C$ *открыто и* $C \supset A\}$.

Доказательство. Определим класс множеств

$$\mathcal{F} = \{B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), \quad B \quad \text{и} \quad B^c \quad \text{удовлетворяют свойству (1)}\}.$$

Заметим, что если множества B и B^c удовлетворяют свойству (1), то они удовлетворяют и свойству (2). Действительно, пусть $\mu(B) = \sup\{\mu(C) : C$ замкнуто и $C \subset B\}$. Тогда $B^c \subset C^c$. Поскольку мера конечна и аддитивна, то

$$\mu(B^c) = \mu(\mathbb{X}) - \mu(B) = \mu(\mathbb{X}) - \sup\{\mu(C) : C \text{ замкнуто и } C \subset B\}$$
$$= \inf\{\mu(A) : A \text{ открыто и } A \supset B^c\}. \quad (1.2)$$

Случай с дополнением B^c рассматривается аналогично.

Очевидно, что все замкнутые множества удовлетворяют (1). Открытые множества также удовлетворяют (1): действительно, пусть A открыто. Тогда $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, где множество

$$K_n = \{x \in A : \operatorname{dist}(x, A^c) \geq 1/n\}$$

замкнуто для всех $n \in \mathbb{N}$, $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$, и

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(K_n)$$

по теореме 1.11. Следовательно, $\mathcal{F}$ содержит все открытые и замкнутые множества. Осталось показать, что $\mathcal{F}$ — σ-алгебра.

1) Докажем, что $\mathcal{F}$ — алгебра, т. е., если $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$, то $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}, B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ и $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{F}$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдем такие замкнутые множества $C_1 \subset B_1$ и $C_2 \subset B_2$, что $\mu(B_i \setminus C_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Тогда из свойства $(B_1 \cup B_2) \setminus (C_1 \cup C_2) \subset (B_1 \setminus C_1) \cup (B_2 \setminus C_2)$ следует

$$\mu((B_1 \cup B_2) \setminus (C_1 \cup C_2)) \leq \mu(B_1 \setminus C_1) + \mu(B_2 \setminus C_2) < 2\varepsilon.$$

Значит, объединение $B_1 \cup B_2$ удовлетворяет свойству (1).

Аналогично, из свойства $(B_1 \cap B_2) \setminus (C_1 \cap C_2) \subset (B_1 \setminus C_1) \cup (B_2 \setminus C_2)$ получаем

$$\mu((B_1 \cap B_2) \setminus (C_1 \cap C_2)) \leq \mu(B_1 \setminus C_1) + \mu(B_2 \setminus C_2) < 2\varepsilon.$$

Следовательно, пересечение $B_1 \cap B_2$ удовлетворяет свойству (1).

Далее заметим, что $(B_1 \cap B_2)^c = B_1^c \cup B_2^c$ и $(B_1 \cup B_2)^c = B_1^c \cap B_2^c$. Отсюда в силу доказанного множества $(B_1 \cap B_2)^c = B_1^c \cup B_2^c$ и $(B_1 \cup B_2)^c = B_1^c \cap B_2^c$ также удовлетворяют свойству (1).

Следовательно, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$ и $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$.

Поскольку $B_1 \setminus B_2 = B_1 \cap B_2^c$ и $(B_1 \setminus B_2)^c = B_1^c \cup B_2$, то, в силу вышедоказанного, $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{F}$.

2) Докажем теперь, что $\mathcal{F}$ является и σ-алгеброй. Пусть $\{B_i\} \subset \mathcal{F}$ — произвольная счетная система множеств, и $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Без ограничения общности можно считать, что $\{B_i\}$ — дизъюнктная система, так как в противном случае можно рассмотреть множества $A_j = B_j \setminus \bigcup\limits_{i<j} B_i$, $A_1 = B_1$. Тогда A_j — дизъюнктная система, причем $\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

В силу счетной аддитивности меры $\mu(B) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$. Поскольку каждое из множеств $B_i \in \mathcal{F}$, то для любого $i \in \mathbb{N}$ существует такое замкнутое множество $C_i \subset B_i$, что $\mu(B_i \setminus C_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Полагая $D_N = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} C_i$, где N выбрано так, что $\sum\limits_{i>N} \mu(B_i) < \varepsilon$, получаем

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \setminus D_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu(B_i \setminus C_i) + \sum_{i>N} \mu(B_i) < 2\varepsilon.$$

Так как D_N — замкнутое множество для любого N, то B удовлетворяет (1).

Остается показать, что B^c удовлетворяет (1). Заметим, что $B^c = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i^c$. Определим для каждого B_i^c замкнутое множество $E_i \subset B_i^c$ такое, что $\mu(B_i^c \setminus E_i) \le \frac{\varepsilon}{2^i}$. Положим $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Тогда E — замкнутое множество и $\mu\left(\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i^c\right) \setminus E\right) \le \mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i^c \setminus E_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(B_i^c \setminus E_i) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(B_i^c \setminus E_i) \le \varepsilon$. Поэтому $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i^c = B^c$ удовлетворяет (1).

Таким образом, теорема доказана.

1.19. Следствие. *Если меры* $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty)$, $\mu_1 : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty)$ *конечны и счетно-аддитивны и* $\mu(C) = \mu_1(C)$ *для любого открытого или замкнутого множества* C, *то они совпадают на всех борелевских множествах.*

1.20. Следствие. *Заключение теоремы верно и в случае, если мера* $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty)$ σ*-конечна, т. е.* $\mathbb{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, *где* $\mu(E_n) < \infty$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *(а мера произвольного множества может быть бесконечной). (ДОКАЖИТЕ!)*

Напомним, что символ $\mathcal{S}^k$ обозначает совокупность k-мерных сегментов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, т. е. каждый элемент из $\mathcal{S}^k$ может быть представлен в виде $\langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_k, b_k\rangle$, где $\langle a_i, b_i\rangle$ — одномерный промежуток, $i = 1, \ldots, k$.

1.21. Предложение. *Пусть* $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, |\cdot|)$ — *множество с мерой Лебега. Измеримость множества* $A \subset \mathbb{R}^k$ *по Каратеодори влечет его измеримость по Лебегу.*

Для доказательства этого предложения применим следующую лемму 1.23.

1.22. Определение регулярности меры Лебега на сегментах. *Для любого сегмента* $A \in \mathcal{S}^k$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существуют замкнутый сегмент* $F \in \mathcal{S}^k$ *и открытый сегмент* $G \in \mathcal{S}^k$ *такие, что*

$$F \subset A \subset G \quad \text{и} \quad |G| - \varepsilon \le |A| \le |F| + \varepsilon.$$

1.23. Лемма. *Пусть* $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, |\cdot|)$ — *множество с мерой Лебега. Если характеристическая функция множества* $A \subset \mathbb{R}^k$ *имеет конечную интегральную норму, то для всякого* $\eta > 0$ *существует открытое множество* $U \supset A$ *такое, что*

$$\|\chi_U\| \le \|\chi_A\| + \eta.$$

При этом существует убывающая последовательность открытых множеств $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ *такая, что*

$$U_\sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \supset A \quad \text{и} \quad |A|_e = |U_\sigma| = \lim_{n\to\infty} |U_n|.$$

Доказательство. Фиксируем $\eta > 0$. Возьмем число $\varepsilon > 0$, точное значение которого будет выбрано позже. Поскольку $\|\chi_A\| < \infty$, по определению интегральной нормы существует монотонно возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, неотрицательных ступенчатых функций такая, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \geq \chi_A(x) \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| \leq \|\chi_A\| + \varepsilon.$$

Определим множества $A_n = \{x \in \mathbb{R}^k : \varphi_n(x) \geq 1 - \varepsilon\}$. В силу свойств интегральной нормы имеем оценки

$$\|\chi_{A_n}\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|\varphi_n\| \leq \frac{\|\chi_A\| + \varepsilon}{1-\varepsilon} = \|\chi_A\| + O(\varepsilon).$$

При этом, т. к. $\|\chi_A\| < \infty$, то существует такое $M < \infty$, что $|O(\varepsilon)| < M\varepsilon$ (т. е., отношение $O(\varepsilon)/\varepsilon$ ограничено при $\varepsilon > 0$). Так как последовательность φ_n монотонно возрастает, то $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая вышесказанные свойства, получаем

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = B, \quad \|\chi_A\| \leq \|\chi_B\|, \quad \|\chi_B\| = \lim_{n\to\infty} \|\chi_{A_n}\| \leq \|\chi_A\| + O(\varepsilon)$$

(здесь в предельном переходе использована теорема Беппо Леви). Каждое множество A_n является объединением конечной совокупности элементов из $\mathcal{S}^k$. Так как мера Лебега регулярна на сегментах, то каждый из них можно заключить в открытый k-мерный сегмент так, что объединение U_n «раздутых» открытых k-мерных сегментов содержит A_n и $\|\chi_{A_n}\| \leq \|\chi_{U_n}\| \leq \|\chi_{A_n}\| + \varepsilon/2^n$. Заметим, что $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = B \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus A_n)$, и поэтому, полагая $U = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, имеем

$$\chi_U \leq \chi_B + \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{U_n \setminus A_n}.$$

Отсюда с учетом $\|\chi_{U_n\setminus A_n}\| = \|\chi_{U_n}\| - \|\chi_{A_n}\| \leq \varepsilon/2^n$ получаем

$$\begin{aligned}\|\chi_U\| &\leq \|\chi_B\| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\chi_{U_n\setminus A_n}\| \\ &\leq \|\chi_B\| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \|\chi_A\| + O(\varepsilon) + \varepsilon = \|\chi_A\| + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Таким образом, открытое множество U содержит множество A и обладает свойством $\|\chi_U\| \le \|\chi_A\| + \eta$ при любом выборе $\varepsilon \le \varepsilon_1$, где ε_1 — подходяще выбранное по η число.

Из доказанного в примере 1.3 равенства $\|\chi_A\| = |A|_e$ вытекает второе утверждение леммы. Действительно, рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n = 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. В соответствии с вышедоказанным для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует открытое множество $V_n \supset A$ такое, что

$$\|\chi_{V_n}\| \le \|\chi_A\| + 1/n.$$

Тогда последовательность открытых множеств $U_i = V_1 \cap \ldots \cap V_i$ обладает следующими свойствами: $|U_1| < \infty$, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_i \supset \ldots$, $U_i \supset A$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Отсюда имеем

$$U_\sigma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \supset A \quad \text{и} \quad |A|_e = \|\chi_A\| = \lim_{n\to\infty} \|\chi_{U_n}\| = \lim_{n\to\infty} |U_n| = |U_\sigma|.$$

Доказательство предложения 1.21. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^k$ измеримо по Каратеодори. Достаточно рассмотреть случай, когда множество A имеет конечную внешнюю меру Лебега, так как в противном случае пересечение $A \cap B_n$, где $B_n = B(0,n)$ — шар в $\mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$, измеримо по Каратеодори и имеет конечную внешнюю меру Лебега. Если мы докажем измеримость по Лебегу множества $A \cap B_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то тогда будет доказана и измеримость множества A, так как $\chi_A(x) = \lim \chi_{A\cap B_n}(x)$, где $\chi_{A\cap B_n}(x)$ — измеримая функция.

Пусть теперь множество $A \subset \mathbb{R}^k$ имеет конечную внешнюю меру Лебега и измеримо по Каратеодори, т. е.

$$|F|_e = |F \cap A|_e + |F \setminus A|_e$$

для любого множества $F \subset \mathbb{R}^k$. Из леммы 1.23 вытекает, что $A \subset U_\sigma$, где U_σ — борелевское множество, такое, что $|A|_e = |U_\sigma|_e$ (напомним, что U_σ — измеримое по Лебегу множество и $|U_\sigma| = |U_\sigma|_e$). Полагая $F = U_\sigma$, получим $|U_\sigma|_e = |A|_e + |U_\sigma \setminus A|_e$. Следовательно, внешняя мера множества $U_\sigma \setminus A$ равна нулю. Напомним, что всякое множество нулевой внешней меры Лебега измеримо по Лебегу. Отсюда вытекает измеримость по Лебегу множества A, так как оно отличается от борелевского множества U_σ лишь на множество меры нуль.

2. Меры Хаусдорфа

Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — метрическое пространство. Если $A \subset \mathbb{X}$, то его диаметр $\operatorname{diam} A$ равен $\sup\limits_{x,y}\{d(x,y) : x, y \in A\}$.

2.1. Определение. Для $k \geq 0$, $\delta \in (0, \infty]$ и $A \subset \mathbb{X}$ определим

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} E_i)^k : \operatorname{diam} E_i < \delta, A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big\},$$

где $\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$, а нижняя грань берется по всем счетным покрытиям множества A. Если множество A нельзя покрыть счетной совокупностью множеств указанного вида, то полагаем $\mathcal{H}^k_\delta(A) = \infty$. Величина

$$\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^k_\delta(A)$$

называется (*внешней*) *мерой Хаусдорфа* множества A.

2.2. Замечание. *Так как при $\delta < \delta_0$ нижняя грань берется по более узкому множеству, то $\mathcal{H}^k_\delta(A) \geq \mathcal{H}^k_{\delta_0}(A)$ и, следовательно, всегда существует предел*

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^k_\delta(A).$$

Таким образом, мера Хаусдорфа определена для любого множества $A \subset \mathbb{X}$.

2.3. Теорема. *$\mathcal{H}^k_\delta$ и $\mathcal{H}^k$ — внешние меры для любого $k \geq 0$ и для любого $\delta \in (0, \infty]$.*

Более того, $\mathcal{H}^k$ — борелевская мера, т. е., все борелевские множества измеримы относительно внешней меры $\mathcal{H}^k$.

Доказательство. Выберем $\delta \in (0, \infty]$ и $k \geq 0$. Рассмотрим множества $A \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\{E^j_i\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, — покрытие A_j счетным набором множеств E^j_i такое, что

$$\operatorname{diam} E^j_i < \delta \quad \text{и} \quad \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} E^j_i)^k \leq \mathcal{H}^k_\delta(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Тогда совокупность $\{E^j_i\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, образует счетное покрытие A, и, следовательно,

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} E^j_i)^k \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^k_\delta(A_j) + \varepsilon.$$

Таким образом, $\mathcal{H}^k_\delta$ — внешняя мера в силу произвольности ε. Поскольку очевидно

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^k(A_j),$$

то переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем, что $\mathcal{H}^k$ — также внешняя мера.

Чтобы доказать, что $\mathcal{H}^k$ — борелевская мера, мы докажем аддитивность меры $\mathcal{H}^k$ на удаленных множествах. Возьмем два удаленных множества A и B и $\delta < \frac{\operatorname{dist}(A,B)}{4}$. По доказанному имеем

$$\mathcal{H}^k(A \cup B) \leq \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B).$$

Предположим, что

$$A \cup B \subset \bigcup_{l\in\mathbb{N}} C_l$$

и $\operatorname{diam} C_l < \delta$. Пусть $\mathcal{A} = \{C_j : C_j \cap A \neq \emptyset\}$ и $\mathcal{B} = \{C_i : C_i \cap B \neq \emptyset\}$. Заметим, что $A \subset \bigcup\limits_{j, C_j\in\mathcal{A}} C_j$, $B \subset \bigcup\limits_{i, C_i\in\mathcal{B}} C_i$ и $C_j \cap C_i = \emptyset$, если $C_j \in \mathcal{A}$ и $C_i \in \mathcal{B}$. Поэтому

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} C_l)^k \geq \sum_{j, C_j\in\mathcal{A}} (\operatorname{diam} C_j)^k + \sum_{i, C_i\in\mathcal{B}} (\operatorname{diam} C_i)^k.$$

Отсюда получаем, что $\mathcal{H}^k_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^k_\delta(A) + \mathcal{H}^k_\delta(B)$, откуда при $\delta \to 0$ вытекает, что $\mathcal{H}^k$ аддитивна на удаленных множествах. По критерию Каратеодори 1.17 получаем, что все борелевские множества $\mathcal{H}^k$-измеримы.

2.4. Теорема. *$\mathcal{H}^k$ — регулярная внешняя мера Бореля, т. е. для любого множества $A \subset \mathbb{X}$ существует $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ такое, что $B \supset A$ и $\mathcal{H}^k(B) = \mathcal{H}^k(A)$.*

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{diam} C = \operatorname{diam} \overline{C}$ для всех $C \subset \mathbb{X}$. Поэтому

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} C_i)^k : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i,\ \operatorname{diam} C_i < \delta,\ C_i = \overline{C_i}\Big\}.$$

Выберем $A \subset \mathbb{X}$ такое, что $\mathcal{H}^k(A) < \infty$. Тогда $\mathcal{H}^k_\delta(A) < \infty$ для всех $\delta > 0$. Для каждого $l \geq 1$ выберем замкнутые множества $\{C^l_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\operatorname{diam} C_i^l \le l^{-1}, \quad A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i^l \quad \text{и} \quad \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i\in\mathbb{N}}\bigl(\operatorname{diam} C_i^l\bigr)^k \le \mathcal{H}^k_{l^{-1}}(A) + l^{-1}.$$

Положим $A_l = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} C_i^l$ и $B = \bigcap\limits_{l\in\mathbb{N}} A_l$. Тогда B — борелевское множество. Кроме того, $A \subset A_l$ для каждого $l \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $A \subset B$. При этом

$$\mathcal{H}^k_{l^{-1}}(B) \le \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i\in\mathbb{N}}\bigl(\operatorname{diam} C_i^l\bigr)^k \le \mathcal{H}^k_{l^{-1}}(A) + l^{-1}.$$

Устремляя $l \to \infty$, получаем $\mathcal{H}^k(B) \le \mathcal{H}^k(A)$. Так как $A \subset B$, то, в силу монотонности, $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(B)$ и, следовательно, $\mathcal{H}^k(B) = \mathcal{H}^k(A)$.

2.5. Задача. Доказать, что $\mathcal{H}^k_\delta$ — регулярная мера Бореля.

2.6. Свойства меры Хаусдорфа.

1. $\mathcal{H}^0$ — считающая мера, т. е. значение $\mathcal{H}^0(A)$ равно количеству элементов в множестве A, если оно конечное, и равно ∞, если A — бесконечное множество.

2. $\mathcal{H}^1 = |\cdot|_e$ на $\mathbb{R}$, где $|\cdot|_e$ — внешняя одномерная мера Лебега.

3. $\mathcal{H}^k \equiv 0$ на $\mathbb{R}^n$ для всех $k > n$.

4. $\mathcal{H}^k(\lambda A) = \lambda^k \mathcal{H}^k(A)$ для любого $\lambda > 0$.

5. $\mathcal{H}^k(L(A)) = \mathcal{H}^k(A)$ для любого изометрического отображения $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Доказательство. 1. Заметим, что $\omega_0 = 1$. Отсюда получаем, что $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$ для любого $a \in \mathbb{X}$, т. е., $\mathcal{H}^0$ — считающая мера.

2. Выберем $A \subset \mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Так как $\frac{\omega_1}{2} = 1$, то для любого покрытия множества A счетной совокупностью множеств $\{C_j\}$ такой, что $\operatorname{diam} C_j < \delta$ имеем покрытие множества A счетной совокупностью одномерных промежутков $\{T_j = [\inf C_j, \sup C_j]\}$, причем $\operatorname{diam} C_j = |T_j| = \sup C_j - \inf C_j$. Отсюда

$$|A|_e \le \inf\Bigl\{\sum_{i\in\mathbb{N}} |T_i| : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\Bigr\} = \inf\Bigl\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam} C_i : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\Bigr\} = \mathcal{H}^1_\delta(A).$$

(Здесь нельзя поставить равенство, так как формально в определении внешней меры $|A|_e$ участвуют покрытия множества A одномерными промежутками произвольной длины.)

С другой стороны, пусть $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j$ — произвольное покрытие множества A одномерными промежутками. Положим $I_l = [l\delta/4, (l+1)\delta/4)$, $l \in \mathbb{Z}$. Тогда непустое пересечение $T_j \cap I_l$ — промежуток, $\operatorname{diam}(T_j \cap I_l) = |T_j \cap I_l| \le \delta/2 < \delta$, $T_j = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} (T_j \cap I_l)$ и в силу счетной аддитивности меры

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(T_j \cap I_l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |T_j \cap I_l| = |T_j| = \operatorname{diam} T_j.$$

Следовательно,

$$|A|_e = \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} |T_i| : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i\Big\} = \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam} T_i : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i\Big\}$$
$$= \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(T_j \cap I_l) : A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} T_j\Big\} \ge \mathcal{H}^1_\delta(A).$$

(Заметим, что, как и в предыдущем случае, равенство поставить нельзя.) Таким образом, $|A|_e = \mathcal{H}^1_\delta(A)$ для всех $\delta > 0$ и, следовательно, $|A|_e = \mathcal{H}^1(A)$ на $\mathbb{R}$. 3. Фиксируем натуральное число $m \ge 1$. Единичный куб Q в $\mathbb{R}^n$ раскладывается на m^n кубов со сторонами $\frac{1}{m}$ и диаметрами $\frac{\sqrt{n}}{m}$. Поэтому

$$\mathcal{H}^k_{\frac{\sqrt{n}}{m}}(Q) \le \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i=1}^{m^n} \Big(\frac{\sqrt{n}}{m}\Big)^k = \frac{\omega_k}{2^k} n^{\frac{k}{2}} m^{n-k}.$$

Так как $\frac{\omega_k}{2^k} n^{\frac{k}{2}} m^{n-k} \to 0$ при $m \to \infty$, если $k > n$, то $\mathcal{H}^k(Q) = 0$. Следовательно, в силу счетной полуаддитивности, $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n) = 0$.

Свойства 4 и 5 очевидны: в первом из них диаметры множеств из покрытия изменяются λ раз, во втором — не меняются.

2.7. Лемма. *Пусть $A \subset \mathbb{X}$ и $\mathcal{H}^k_\delta(A) = 0$ для некоторого $0 < \delta \le \infty$. Тогда $\mathcal{H}^k(A) = 0$.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно при $k = 0$. Поэтому будем считать, что $k > 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существуют множества $\{C_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $A \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} C_j$ и

$$\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{j\in\mathbb{N}}(\operatorname{diam} C_j)^k \le \varepsilon.$$

В частности, для каждого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\operatorname{diam} C_j \le 2\Big(\frac{\varepsilon}{\omega_k}\Big)^{\frac{1}{k}} = \eta(\varepsilon).$$

Поэтому $\mathcal{H}^k_{\eta(\varepsilon)}(A) \le \varepsilon$. Так как $\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то $\mathcal{H}^k(A) = 0$.

2.8. Лемма. *Пусть $A \subset \mathbb{X}$ и $0 \le k < t < \infty$.*
1. *Если $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, то $\mathcal{H}^t(A) = 0$.*
2. *Если $\mathcal{H}^t(A) > 0$, то $\mathcal{H}^k(A) = \infty$.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{H}^k(A) < \infty$. Фиксируем $\delta > 0$. Тогда существуют множества $\{C_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\operatorname{diam} C_j < \delta$, $A \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} C_j$ и

$$\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{j\in\mathbb{N}}(\operatorname{diam} C_j)^k \le \mathcal{H}^k_\delta(A) + 1 \le \mathcal{H}^k(A) + 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^t_\delta(A) &\le \frac{\omega_t}{2^t}\sum_{j\in\mathbb{N}}(\operatorname{diam} C_j)^t \\ &= \frac{\omega_t}{\omega_k}2^{k-t}\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{\omega_k}{2^k}(\operatorname{diam} C_j)^k(\operatorname{diam} C_j)^{t-k} \le \frac{\omega_t}{\omega_k}2^{k-t}\delta^{t-k}(\mathcal{H}^k(A)+1).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Устремляя $\delta \to 0$, получим $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Утверждение 1 доказано. Утверждение 2 вытекает из соотношения (2.1).

2.9. Теорема (изодиаметрическое неравенство). *Пусть A — произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}^k$. Тогда*

$$|A|_e \le \omega_k\Big(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\Big)^k.$$

Доказательство. Можно полагать, что A замкнуто (так как $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$, а $|A|_e \le |\overline{A}|_e$) и $\operatorname{diam} A < \infty$. Фиксируем единичный вектор $e \in \mathbb{R}^k$. Тогда

$$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k-1}_e \oplus \{e\},$$

где $\mathbb{R}^{k-1}_e$ — ортогональное дополнение к $e \in \mathbb{R}^k$.

Обозначим символом $\Omega = P_e(A)$ проекцию множества A на $\mathbb{R}^{k-1}_e$. Далее, пусть

$$2h(x) = |A \cap L_x|_1,\ x \in \Omega,$$

где L_x — прямая, проходящая через x в направлении e, а $|\cdot|_1$ — одномерная мера Лебега. По теореме Фубини получаем, что $h(x)$ интегрируема, а, значит, измерима, и

$$2\int\limits_{\Omega} h(x)\,dx = |A|_e.$$

(Здесь используется измеримость множества A. Поэтому $|A|_e = \int\limits_A \chi_A\,dz = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{A\cap L_x} dy = 2\int\limits_{\Omega} h(x)\,dx$.)

Рассмотрим множество

$$S_e(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{k-1}_e \times \mathbb{R}:\ x \in \Omega,\ |y| \le h(x)\}.$$

Очевидно $|A|_e = |S_e(A)|_e$: действительно,

$$|A|_e = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{A\cap L_x} dy = 2\int\limits_{\Omega} h(x)\,dx = |S_e(A)|_e.$$

Заметим, что $S_e(A)$ симметрично относительно направления e, и если множество A было симметрично по ортогональному к e направлению, то эта симметрия сохраняется.

Докажем, что $\operatorname{diam} S_e(A) \le \operatorname{diam} A$, или

$$\operatorname{diam} S_e(A) = \sup_{x,x'\in\Omega} \sqrt{|x-x'|^2 + (h(x)+h(x'))^2}$$
$$\le \sup_{x,x'\in\Omega} \operatorname{diam}((L_x \cap A) \cup (L_{x'} \cap A)) = \operatorname{diam} A.$$

Положим

$$b = \sup(L_x \cap A),\ a = \inf(L_x \cap A),$$
$$b' = \sup(L_{x'} \cap A),\ a' = \inf(L_{x'} \cap A).$$

Без ограничения общности можно считать, что $b - a' \ge b' - a$. Поскольку по определению функции h

$$b' - a' \ge 2h(x') \ \text{ и } \ b - a \ge 2h(x),$$

то имеем $b - a' \geq h(x) + h(x')$ и поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}((L_x \cap A) \cup (L_{x'} \cap A)) &= \sqrt{|x - x'|^2 + |b - a'|^2} \\ &\geq \sqrt{|x - x'|^2 + (h(x) + h(x'))^2}.\end{aligned}$$

Возьмем ортогональный базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в $\mathbb{R}^k$ и множество

$$A^* = S_{e_1} \circ \dots \circ S_{e_k}(A).$$

Тогда

$$\operatorname{diam} A^* \leq \operatorname{diam} A \quad \text{и} \quad |A^*| = |A|.$$

По построению A симметрично относительно направлений $e_1, \dots, e_n$. Тогда A симметрично относительно начала координат, и каждому $x \in A^*$ соответствует $-x \in A^*$. Отсюда для любого $x \in A^*$

$$2|x| \leq \operatorname{diam} A^*$$

и

$$x \in B\Big(0,\ \frac{\operatorname{diam} A^*}{2}\Big).$$

Тогда и

$$A^* \subset B\Big(0,\ \frac{\operatorname{diam} A^*}{2}\Big).$$

Из этого следует, что

$$|A|_e = |A^*|_e \leq \omega_k \Big(\frac{\operatorname{diam} A^*}{2}\Big)^k \leq \omega_k \Big(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\Big)^k,$$

что и требовалось доказать.

2.10. Теорема о совпадении мер Лебега и Хаусдорфа. *Для любого $B \subset \mathbb{R}^k$*

$$|B|_e = \mathcal{H}^k(B).$$

(Здесь $|\cdot|_e$ — внешняя k-мерная мера Лебега.)

Доказательство. Так как обе меры — регулярные меры Бореля (см. теорему 2.4), то достаточно доказать совпадение мер для борелевского множества B. Будем считать, что B ограничено. Фиксируем $\delta > 0$ и пусть $B \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} B_i$, где $\operatorname{diam} B_i < \delta$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда из изодиаметрического неравенства имеем

$$|B|_e \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |B_i|_e \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{diam} B_i)^k.$$

Отсюда, переходя к нижней грани по всем покрытиям, получаем

$$\mathcal{H}^k_\delta(B) \geq |B|_e$$

и, следовательно,

$$\mathcal{H}^k(B) \geq |B|_e.$$

Докажем теперь неравенство в обратную сторону. Выберем открытое множество $A \supset B$ и $\delta > 0$. Определим систему

$$\mathcal{F} = \{\overline{B(x,r)} : x \in B,\ B(x,r) \subset A,\ 2r < \delta\}$$

замкнутых шаров, образующих покрытие Витали множества B. По теореме Витали можно выбрать не более чем счетную дизъюнктную подсистему $\{B(x_i, r_i)\} = \{B_i\}$ такую, что $|E|_e = 0$, где

$$E = B \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{B(x_i, r_i)}.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_\delta(B) &\leq \mathcal{H}^n_\delta\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{B_i}\Big) + \mathcal{H}^n_\delta(E) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n_\delta(\overline{B_i}) + \mathcal{H}^n_\delta(E)\\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\omega_n}{2^n}(2r_i)^n + \mathcal{H}^n_\delta(E) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |B_i| + \mathcal{H}^n_\delta(E) \leq |A| + \mathcal{H}^n_\delta(E).\end{aligned}$$

Отсюда $\mathcal{H}^n(B) \leq |A|$ и, следовательно, $\mathcal{H}^n(B) \leq |B|_e$, поскольку $\mathcal{H}^n_\delta(E) = 0$ (ПРОВЕРИТЬ!) и $|B|_e = \inf\{|A| : A \text{ открыто и } B \subset A\}$ в силу регулярности меры Лебега.

Таким образом, $|B|_e = \mathcal{H}^n(B)$.

2.11. Определение. *Хаусдорфова размерность* множества $A \subset \mathbb{X}$ определяется соотношением

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s : 0 \leq s < \infty,\ \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

2.12. Замечание. 1. *По определению хаусдорфовой размерности и по лемме 2.8 видно, что* $s = \dim_{\mathcal{H}}(A)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{H}^t(A) = 0$ *для всех* $t > s$ *и* $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ *для всех* $t < s$.

2. *Отметим, что* $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq k$ *для любого* $A \subset \mathbb{R}^k$ (*см.* 2.6).

2.13. Замечание. *Если в пространстве* $\mathbb{R}^k$ *фиксирована евклидова метрика, то* $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^k) = k$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 2.10 $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^k) = \infty$, а в силу свойств 2.6 меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^k) = 0$ для любого $s > k$.

2.14. Теорема Бине — Коши. *Для любой матрицы L вида*

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$n \le m$, *верно равенство*

$$\det(L^*L) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n \le m} \left(\det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & & \dots \\ a_{i_n 1} & \dots & a_{i_n n} \end{pmatrix} \right)^2.$$

Доказательство. В случае $m = n$ теорема вытекает из соотношения $\det L = \det L^*$. Докажем теорему только в случае, когда $m = n+1$. Ее геометрический смысл в этом случае состоит в том, что квадрат объема n-мерного параллелепипеда в $\mathbb{R}^{n+1}$ равен сумме квадратов n-мерных объемов его проекций на n-мерные координатные подпространства (обобщение теоремы Пифагора).

Пусть $n = 2$, $m = 3$, векторы $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ и $a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ — столбцы матрицы L, e_1, e_2 и e_3 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, и

$$w = a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & a_{11} & a_{21} \\ e_2 & a_{12} & a_{22} \\ e_3 & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} e_1.$$

Известно, что длина вектора w равна площади параллелограмма $V(a_1, a_2)$, натянутого на векторы a_1 и a_2, а сам w ортогонален a_1 и a_2. Если на получившиеся 3 вектора w, a_1 и a_2 натянуть 3-мерный параллелепипед $V(w, a_1, a_2)$, то его объем будет равен

$$|V(w, a, b)| = \begin{vmatrix} w_1 & a_{11} & a_{21} \\ w_2 & a_{12} & a_{22} \\ w_3 & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = (w, w) = |w|^2 = V^2(a_1, a_2) = \det(L^*L).$$

(Последнее равенство следует из свойств векторного произведения.) Отсюда вытекает равенство

$$\det(L^*L) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 3} \left(\det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \end{pmatrix} \right)^2.$$

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим определитель

$$w = \begin{vmatrix} e_1 & & & \\ \ldots & a_1 & \ldots & a_n \\ e_{n+1} & & & \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} A_i e_i,$$

где a_i — столбцы матрицы L, A_i — коэффициенты в разложении определителя по первому столбцу. Вектор $w = (A_1, \ldots, A_{n+1})$ является аналогом векторного произведения $a_1 \times \ldots \times a_n$ векторов $a_1, \ldots, a_n$. Заметим, что $|w|^2 = (w, w) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i^2$ и что вектор w ортогонален каждому a_i, $i = 1, \ldots, n$. (При подстановке в матрицу какого-либо столбца a_i, $i = 1, \ldots, n$, вместо $e_1, \ldots, e_{n+1}$ получим определитель, равный нулю.) Отсюда получаем, что объем параллелепипеда $V(w, a_1, \ldots, a_n)$, натянутого на векторы $w, a_1, \ldots, a_n$, равен

$$\begin{aligned} |V(w, a_1, \ldots, a_n)| &= |\det(w, a_1, \ldots, a_n)| \\ &= (w, w) = |w|^2 = |w| \cdot |V(a_1, \ldots, a_n)|, \end{aligned}$$

где $|V(a_1, \ldots, a_n)| = |w|$ — объем параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1, \ldots, a_n$. Заметим, что объем параллелепипеда $V(a_1, \ldots, a_n)$ равен $\sqrt{\det(L^*L)}$, так как, полагая $\eta = \frac{w}{|w|}$, имеем

$$\begin{aligned} V^2(a_1, \ldots, a_n) &= |V(\eta, a_1, \ldots, a_n)| \cdot |V(\eta, a_1, \ldots, a_n)| \\ &= \det(\eta, a_1, \ldots, a_n)^* \cdot \det(\eta, a_1, \ldots, a_n) \\ &= \det((\eta, a_1, \ldots, a_n)^* \cdot (\eta, a_1, \ldots, a_n)) = \det(L^*L), \end{aligned}$$

где $(\eta, a_1, \ldots, a_n)^*$ — матрица, сопряженная матрице $(\eta, a_1, \ldots, a_n)$ (здесь при подсчете следует учесть, что вектор η ортогонален каждому из векторов $a_1, \ldots, a_n$, и $(\eta, \eta) = 1$). Поэтому

$$\det(L^*L) = |w|^2 = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le n+1} \left(\det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \ldots & a_{i_1 n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{i_n 1} & \ldots & a_{i_n n} \end{pmatrix} \right)^2.$$

3. Формула площади

Множество $\mathbb{Z}^k$ точек в $\mathbb{R}^k$, имеющих целочисленные координаты, определяет разбиение $\mathcal{D}_0$ пространства $\mathbb{R}^k$ на кубы со стороной, равной единице. В предварительных рассмотрениях мы будем считать, что эти кубы «замкнуты слева»: каждый куб $Q \in \mathcal{D}_0$ имеет вид

$$[s_1, s_1+1) \times [s_2, s_2+1) \times \ldots \times [s_k, s_k+1),$$

где $(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{Z}^k$. Кроме того, внутренность такого куба совпадает с некоторым шаром в метрике $|\cdot|_\infty$ радиуса $1/2$, центр которого расположен в точке $(s_1+1/2, s_2+1/2, \ldots, s_k+1/2)$. Очевидно, что $\mathcal{D}_0$ — дизъюнктная система кубов и $\mathbb{R}^k = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{D}_0} Q$.

Разбиение $\mathcal{D}_0$ определяет набор двоичных кубов

$$\mathcal{D}_n = 2^{-n}\mathcal{D}_0 = \{2^{-n}Q : Q \in \mathcal{D}_0\}$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$. (Здесь $\lambda Q = \{\lambda x : x \in Q\}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — произвольное положительное число.) Очевидно, что каждый куб $Q \in \mathcal{D}_n$ имеет вид

$$\Big[\frac{s_1}{2^n}, \frac{s_1+1}{2^n}\Big) \times \Big[\frac{s_2}{2^n}, \frac{s_2+1}{2^n}\Big) \times \ldots \times \Big[\frac{s_k}{2^n}, \frac{s_k+1}{2^n}\Big),$$

где $(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{Z}^k$. Внутренность этого куба совпадает с некоторым шаром в метрике $|\cdot|_\infty$ радиуса $1/2^{n+1}$, центр которого расположен в точке $\left(\frac{2s_1+1}{2^{n+1}}, \frac{2s_2+1}{2^{n+1}}, \ldots, \frac{2s_k+1}{2^{n+1}}\right)$. Очевидно, что $\mathcal{D}_n$ — дизъюнктная система кубов и $\mathbb{R}^k = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{D}_n} Q$.

3.1. Свойство. *Пусть* $(\mathbb{R}^k, |\cdot|_\infty)$ *— метрическое пространство, а* $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ *— открытое множество. Тогда для любого* $n \geq n_0$*, где* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *— некоторое целое число, существует непустой набор* $\mathcal{M}_n$ *двоичных кубов, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $\mathcal{M}_n = \{Q \in \mathcal{D}_n : \overline{Q} \subset \Omega\}$;
2) *множество* $M_n = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{M}_n} Q \subset \Omega$ *борелевское;*
3) $M_n \subset M_{n+1}$;
4) $\bigcup\limits_{n \geq n_0} M_n = \Omega$;
5) $\lim\limits_{n \to \infty} |M_n| = |\Omega|$.

Доказательство. Поскольку Ω — открытое множество, то существует такое n_0, что, по крайней мере, один куб из $\mathcal{D}_{n_0}$ содержится в Ω. Требуемый набор $\mathcal{M}_n$ двоичных кубов при $n \geq n_0$ определяется условием 1. Так как каждый куб — борелевское множество, то и множество M_n также борелевское. Очевидно, каждый куб $Q \in \mathcal{M}_n$

разбивается на 2^k равных кубов, входящих в разбиение $\mathcal{D}_{n+1}$, а следовательно, и в $\mathcal{M}_{n+1}$. Отсюда получаем третье свойство. Для доказательства четвертого свойства возьмем точку $x \in \Omega$. Заметим, что если $n \geq n_0$ — такое число, что $\frac{1}{2^n} < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, то двоичный куб из набора $\mathcal{D}_n$, которому принадлежит точка x, содержится в Ω вместе со своим замыканием и, следовательно, принадлежит набору $\mathcal{M}_n$. Последнее свойство вытекает из леммы 1.11.

3.2. Определение. Пусть (M_1, d_1), (M_2, d_2) — метрические пространства. Отображение $f : (M_1,\ d_1) \to (M_2,\ d_2)$ называется *липшицевым*, если существует постоянная $C \in \mathbb{R}$, называемая *постоянной Липшица*, такая, что

$$d_2(f(x),\ f(y)) \leq C d_1(x,\ y)$$

для любых $x, y \in M_1$.

Отображение $f : (M_1,\ d_1) \to (M_2,\ d_2)$ называется *билипшицевым*, если существуют постоянные $0 < \underline{C},\ \overline{C} < \infty$ такие, что

$$\underline{C} d_1(x,\ y) \leq d_2(f(x),\ f(y)) \leq \overline{C} d_1(x,\ y)$$

что для любых $x, y \in M_1$.

Напомним, что обозначение $W \Subset U$, $U \subset \mathbb{R}^k$, мы применяем в том случае, когда множество U открыто, множество W ограничено и $\overline{W} \subset U$ (в этом случае говорят, что множество W *компактно вложено* в U). Множество W называется выпуклым, если вместе с двумя точками $x, y \in W$ множеству W принадлежит также и отрезок, соединяющий эти точки.

3.3. Пример. Широкий класс липшицевых отображений можно описать следующим условием. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^m$ принадлежит классу C^1. Тогда для любого выпуклого множества $W \Subset U$ существует постоянная $\kappa \in \mathbb{R}$, зависящая лишь от размерностей k и m, и такая, что

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi \in W} \|df(\xi)\| |x - y|$$

для всех точек $x, y \in W$.

Доказательство. 1) Докажем сначала, что если коэффициенты $(m \times k)$-матрицы $A(x)$, $x \in U$, — непрерывные функции в точке x_0, то ее норма непрерывна в этой точке. Действительно, если $v = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i e_i$, где $\{e_i\}$ — ортонормированный базис, и евклидова норма $|v|$ не превосходит 1, то

$$|A(x)v| \leq \sum_{i=1}^{k} |v_i||A(x)e_i| \leq |v|\sqrt{\sum_{i=1}^{k} |A(x)e_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2(x)}.$$

Следовательно, в силе произвольности v, $|v| \leq 1$ имеем

$$\|A(x)\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2(x)}.$$

Из последнего неравенства вытекает непрерывность нормы в точке x_0, поскольку

$$\|A(x) - A(x_0)\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)|^2}.$$

Пусть $L = L(x, y)$, $x, y \in W$ — отрезок в W, соединяющий x и y, а $M = \sup\limits_{\xi \in L} \| df(\xi)\|$. Пусть еще $\xi(t)$ — его натуральная параметризация: $\xi : [0, l] \to W$, $\xi(0) = x$, $\xi(l) = y$, $|\xi'(t)| = 1$ для всех $t \in (0, l)$. Тогда получаем следующее неравенство:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int\limits_0^{|x-y|} df(\xi(t))\, dt \right| \leq \int\limits_0^{|x-y|} \|df(\xi(t))\|\, dt$$
$$\leq M \int\limits_0^{|x-y|} dt \leq \sup_{\xi \in W} \| df(\xi)\| |x - y|.$$

3.4. Теорема. *Пусть* (M_1, d_1), (M_2, d_2) — *метрические пространства и* $s \in [0, \infty)$.

1. Если $f : (M_1,\ d_1) \to (M_2,\ d_2)$ — *липшицево отображение с постоянной Липшица* C, *то*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq C^s \mathcal{H}^s(A)$$

для любого множества $A \subset M_1$.

2. Если $f : (M_1,\ d_1) \to (M_2,\ d_2)$ — билипшицево отображение с постоянными $\underline{C}$ и $\overline{C}$, то

$$\underline{C}^s \mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{H}^s(f(A)) \le \overline{C}^s \mathcal{H}^s(A)$$

для любого множества $A \subset M_1$.

Доказательство. 1. Фиксируем $\delta > 0$ и выбираем покрытие $\{E_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, множества A таким образом, что $\operatorname{diam} E_i < \delta$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f(E_i) \supset f(A)$. Из условия теоремы имеем, что $\operatorname{diam} f(E_i) \le C \operatorname{diam} E_i$ (ПРОВЕРИТЬ), поэтому $\operatorname{diam} f(E_i) \le C\delta$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\mathcal{H}^s_{C\delta}(f(A)) \le \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} f(E_i))^s \le \frac{\omega_s}{2^s} C^s \sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} E_i)^s.$$

Переходя к нижней грани по всем покрытиям $\{E_i\}$ множества A, получаем

$$\mathcal{H}^s_{C\delta}(f(A)) \le C^s \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

При $\delta \to 0$ имеем $\mathcal{H}^s(f(A)) \le C^s \mathcal{H}^s(A)$.

2. Доказывается аналогично случаю 1.

3.5. Следствие. *1. Если $f : (M_1,\ d_1) \to (M_2,\ d_2)$ — липшицево отображение, то из того, что $\mathcal{H}^s(A) = 0$ следует $\mathcal{H}^s(f(A)) = 0$ для всех $A \subset M_1$.*

2. Если $f : (M_1,\ d_1) \to (M_2,\ d_2)$ — билипшицево, то $\mathcal{H}^s(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^s(f(A)) = 0$ для всех $A \subset M_1$.

Напомним разницу в обозначениях: символ $|A|_e$ обозначает внешнюю меру Лебега множества A, в то время как символ $|A|$ обозначает меру Лебега измеримого множества A. Ясно, что $|A|_e = |A|$, если множество A измеримо, однако, это равенство не имеет никакого смысла, если множество A неизмеримо. Это соглашение контрастирует с применением символа $\mathcal{H}^n$ для меры Хаусдорфа, так как он один и тот же как для измеримого, так и для неизмеримого множеств.

3.6. Лемма. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ принадлежит классу C^1, $k \le m$. Тогда для любого* *компактного множества* $K \subset U$ *существует постоянная* $L = L(K) \in \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\mathcal{H}^k(f(K)) \le L^k |K|.$$

(*Заметим, что постоянная* L *зависит от* $\sup\limits_{\xi \in K} \|df(\xi)\|$.)

Доказательство. Фиксируем произвольное $l \in \mathbb{N}$ и рассмотрим открытое множество $\Omega_l = \{x \in U : \operatorname{dist}(x, K) < l^{-1}$ и $\operatorname{dist}(x, U^c) > \operatorname{dist}(K, U^c)/2\}$. Очевидно, что $\Omega_l \Subset U$ и $K \subset \Omega_l$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — такое число, что множество M_n из свойства 3.1 содержит данное множество K и $M_n \subset \Omega_l$, т. е. $K \subset M_n \subset \Omega_l$. Напомним, что M_n состоит из набора $\mathcal{M}_n$ кубов $Q \in \mathcal{D}_n$ таких, что $\overline{Q} \subset \omega$. На каждом таком кубе отображение f липшицево (см. пример 3.3). В качестве постоянной Липшица возьмем $L = \kappa \sup\limits_{\xi \in \Omega_l} \|df(\xi)\|$. По теореме 3.4 и теореме о совпадении мер Лебега и Хаусдорфа имеем

$$\mathcal{H}^k(f(Q)) \le L^k |Q|$$

для любого куба $Q \in \mathcal{M}_n$. Отсюда получаем

$$\mathcal{H}^k(f(K)) \le \mathcal{H}^k(f(M_n)) \le \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} \mathcal{H}^k(f(Q)) \le \\ L^k \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} \mathcal{H}^k(Q) = L^k \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} |Q| = L^k |M_n| \le L^k |\Omega_l|.$$

Поскольку $\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \Omega_l = K$ и $\lim\limits_{l \to \infty} |\Omega_l| = |K|$, то

$$\mathcal{H}^k(f(K)) \le L^k |K|.$$

3.7. Следствие. *Если* $|W| = 0$, *то и* $\mathcal{H}^k(f(W)) = 0$.

Сформулируем алгебраическую лемму, используемую ниже.

3.8. Лемма. *Пусть* $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $k \le m$, — *линейное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *отображение* $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *взаимно-однозначно;*
2) $\operatorname{rang} L = k$;
3) $\inf\limits_{|v|=1} \|L(v)\| > 0$;
4) $\det(L^* L) > 0$.

3.9. Лемма. *Если* $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m,\ k \le m,$ *— линейное отображение, то*

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det(L^*L)}|A|$$

для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^k$ *(здесь* $|\cdot|$ *—* k*-мерная мера Лебега).*

Опишем геометрический смысл сформулированной теоремы. Величина $\det(L^*L)$ называется *определителем Грама* матрицы L. Если $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^k$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^k$, а $a_1 = L(e_1), \dots, a_k = L(e_k) \in \mathbb{R}^m$ — их образы, то определитель Грама матрицы L равен квадрату объема k-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1, \dots, a_k$

Доказательство. 1. Пусть $\operatorname{rang} L < k$. Тогда, с одной стороны, $\det(L^*L) = 0$, а, с другой стороны, так как образ $L(\mathbb{R}^k)$ содержится в линейном подпространстве, размерность которого меньше k, то по свойству 2 меры Хаусдорфа (см. 2.6) имеем $\mathcal{H}^k(L(\mathbb{R}^k)) = 0$.

2. Пусть теперь $\operatorname{rang} L = k$. Тогда $\dim L(\mathbb{R}^k) = k$. Рассмотрим такое ортогональное преобразование $O \in SO(m)$, что $(O \circ L)(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{m-k}$. Поскольку ортогональное преобразование является изометрическим отображением, то из свойства 5 меры Хаусдорфа теоремы 2.6 вытекает ее инвариантность относительно ортогонального преобразования. Поэтому

$$\mathcal{H}^k((O \circ L)(A)) = \mathcal{H}^k(L(A)). \tag{3.1}$$

Обозначим $L' = O \circ L$. Легко видеть, что в силу выбора O матрица L' имеет вид

$$L' = \begin{pmatrix} & L'' & \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где L'' — квадратная $(k \times k)$-матрица. Тогда L'^* имеет вид

$$L'^* = \begin{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ L''^* & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$|L''(A)| = |\det L''| \cdot |A|.$$

Так как $\det L''^{*} = \det L''$, то

$$|\det L''| = \sqrt{\det(L''^{*} L'')}.$$

Из равенств $L''^{*} \circ L'' = L'^{*} \circ L' = L^{*} \circ O^{*} \circ O \circ L = L^{*} \circ L$, (3.1) и теоремы 2.10 получаем

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \mathcal{H}^k((O \circ L)(A)) = \mathcal{H}^k(L''(A)) = |L''(A)| = \sqrt{\det(L^{*}L)}|A|,$$

что и требовалось доказать.

3.10. Лемма о касательном отображении. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — гомеоморфизм класса C^1 и $\operatorname{rang} df(x) = k$ для всех точек $x \in U$. Пусть еще $g(y) = f(x) + df(x)(y - x)$ — касательное отображение f в точке $x \in U$. Тогда*

$$(1 - o(1))|g(y) - g(z)| \leq |f(y) - f(z)| \leq (1 + o(1))|g(y) - g(z)| \quad (3.2)$$

для точек y, $z \in Q(x, r)$, где $o(1)$ — неотрицательная величина и $o(1) \to 0$ при $r \to 0$.

Если $F \subset U$ — фиксированный компакт, то величина $o(1)$ равномерна на F при $r \to 0$.

Доказательство. По предположению $\operatorname{rang} df(x) = k$ для всех точек $x \in U$. Фиксируем $x \in U$ и компакт $F \subset U$, содержащий точку x. Тогда $f(y) - f(z) = df(z)(y - z) + o(1)(y - z)$, где величина $o(1)$ равномерна на F при $r \to 0$. Очевидно имеем

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &= (df(z) - df(x))(y - z) + df(x)(y - z) + o(1)(y - z) \\ &= (df(z) - df(x))(y - z) + (g(y) - g(z)) + o(1)(y - z), \end{aligned}$$

где $g(y) = f(x) + df(x)(y - x)$ — касательное отображение f в точке $x \in U$, а величина $o(1)$ равномерна на F при $r \to 0$. Заметим, что $\|df(z) - df(x)\| = o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно на F.

Далее имеем $g(y) - g(z) = df(x)(y - z)$. Поскольку линейное отображение $df(x)$ взаимно однозначно, то в силу леммы 3.8 получаем

$$|y - z| \leq \|df^{-1}(x)\| |g(y) - g(z)|,$$

где $df^{-1}(x)$ — определенное на $df(x)(\mathbb{R}^k)$ отображение, обратное к $df(x)$. Заметим, что поскольку функция $U \ni x \mapsto \inf\limits_{|v|=1} \|df(x)(v)\|$

не отграничена снизу от нуля на U, то норма линейного отображения $df^{-1}(x)$ может быть сколь угодно большой на U. Однако, если мы возьмем любое компактное множество F в U, то

$$\inf_{x\in F}\inf_{|v|=1}\|df(x)(v)\| \geq M = M(F) > 0.$$

Действительно, если $\inf\limits_{x\in F}\inf\limits_{|v|=1}\|df(x)(v)\| = 0$, то в силу непрерывности частных производных существует точка $x_0 \in F$ такая, что

$$\inf_{|v|=1}\|df(x_0)(v)\| = 0.$$

Тогда по лемме 3.8 $\operatorname{rang} df(x_0) < k$, что противоречит условию. Поэтому $\sup\limits_{x\in F}\|df^{-1}(x)\| < \infty$ на любом компактном множестве $F \subset U$.

Следовательно, с учетом вышесказанного получаем

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &= (g(y) - g(z)) + o(1)(y - z) \\ &= (g(y) - g(z)) + o(1)(g(y) - g(z)) = (1 + o(1))(g(y) - g(z)), \end{aligned}$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно на F. Отсюда

$$|f(y) - f(z)| = |1 + o(1)||g(y) - g(z)|.$$

Осталось применить неравенство треугольника

$$1 - |o(1)| \leq |1 + o(1)| \leq 1 + |o(1)|$$

и лемма доказана.

3.11. Лемма о локальном искажении меры. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — гомеоморфизм класса C^1 и $\operatorname{rang} df(x) = k$ для всех точек $x \in U$. Тогда для любого $x \in U$ существует предел*

$$\mathcal{J}(x, f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x,r)))}{|Q(x,r)|} = \sqrt{\det(df^*(x)df(x))}. \qquad (3.3)$$

Если $F \subset U$ — фиксированный компакт, то этот предел равномерен на F.

Доказательство. По предположению $\operatorname{rang} df(x) = k$ для всех точек $x \in U$. Фиксируем $x \in U$. Положим $g(y) = f(x) + df(x)(y - x)$. Рассмотрим два метрических пространства:

$$\begin{aligned}
&(M_1, d_1) = (Q(x,r),\ d_1(t,s) = |g(t) - g(s)| \text{ для } t, s \in Q(x,r)),\\
&(M_2, d_2) = (f(Q(x,r)),\ |\cdot|).
\end{aligned}$$

В силу (3.2) отображение $f : Q(x,r) \to f(Q(x,r))$ является билипшицевым отображением метрических пространств (M_1, d_1) и (M_2, d_2):

$$(1 - o(1))|g(y) - g(z)| \le |f(y) - f(z)| \le (1 + o(1))|g(y) - g(z)| \quad (3.4)$$

для точек y, $z \in Q(x,r)$, где $o(1) \to 0$ равномерно на фиксированном компакте $F \subset U$ при $r \to 0$.

По теореме 3.4 получаем

$$\begin{aligned}
(1 - o(1))^k \mathcal{H}^k(g(Q(x,r))) &\le \mathcal{H}^k(f(Q(x,r)))\\
&\le (1 + o(1))^k \mathcal{H}^k(g(Q(x,r))).
\end{aligned}$$

Напомним, что $\mathcal{H}^k(g(Q(x,r))) = \mathcal{H}^k(df(x)(Q(x,r)))$, так как мера Хаусдорфа инвариантна при сдвиге (здесь применятся свойство 5 леммы 2.6, так как сдвиг — изометрическое преобразование).

Далее из леммы 3.9 вытекает

$$\begin{aligned}
(1 - o(1))^k \sqrt{\det(df^*(x)df(x))}|Q(x,r)| &\le \mathcal{H}^k(f(Q(x,r)))\\
&\le (1 + o(1))^k \sqrt{\det(df^*(x)df(x))}|Q(x,r)|.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
&(1 - o(1))^k \sqrt{\det(df^*(x)df(x))}\\
&\qquad \le \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x,r)))}{|Q(x,r)|} \le (1 + o(1))^k \sqrt{\det(df^*(x)df(x))}.
\end{aligned}$$

Таким образом, доказано существование предела

$$\mathcal{J}(x,f) = \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x,r)))}{|Q(x,r)|} = \sqrt{\det(df^*(x)df(x))}.$$

Заметим, что этот предел равномерен на любом фиксированном компакте $F \subset U$.

3.12. Лемма об образе множества вырождения. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $k \le m$, — отображение класса C^1 и $Z = \{x \in U : \operatorname{rang} df(x) \le n < k\}$. Тогда*

$$\mathcal{H}^k(f(Z)) = 0.$$

Доказательство. Пусть множество $Z = \{x \in U : \operatorname{rang} df(x) \le n < k\}$ непусто. Исчерпаем U счетной совокупностью компактных подмножеств $F_0 \subset F_1 \subset \dots$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $l \in \mathbb{N}$. Тогда в силу равномерной непрерывности $df(x) : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times m}$ (мы здесь отождествляем дифференциал с его матрицей порядка $k \times m$) на F_l существует $r_0(F_l) < \operatorname{dist}(F_l, \partial U)/2$ такое, что

$$|f(y) - [f(x) + df(x)(y - x)]| < \varepsilon r$$

для любых точек $x \in F_l$ и $y \in Q(x,r)$, где $r \in (0, r_0(F_l))$. Заметим, что куб $Q(x,r)$ лежит в $r_0(F_l)$-окрестности V_l множества F_l и при этом $V_l \Subset U$. Следовательно, образ $f(Q(x,r))$ любого куба $Q(x,r)$, $x \in F_l$, $r < r_0(F_l)$, лежит в εr-окрестности множества $\{f(x) + df(x)(Q(0,r))\}$. Заметим, что образ $df(x)(Q(0,r))$, $x \in Z \cap F_l$, является частью n-мерной плоскости и имеет линейный размер $O(r)$, где O не зависит от $x \in F_l$, т. е. $\operatorname{diam}(df(x)(Q(0,r))) \le C_l r$, где C_l не зависит от выбора точки $x \in F_l$, так как частные производные отображения f ограничены на F_l. Поэтому εr-окрестность множества $\{f(x) + df(x)(Q(0,r))\}$ содержится в не более чем $O\Big(\frac{r^n}{\varepsilon^n r^n}\Big)$ равновеликих кубах, сторона каждого из которых равна εr. Отсюда для любого такого куба $Q(x,r)$ справедливо

$$\mathcal{H}^k_{\varepsilon r}(f(Q(x,r))) = O((\varepsilon r)^k) O\Big(\frac{r^n}{\varepsilon^n r^n}\Big) = O(\varepsilon^{k-n} r^k) = \varepsilon^{k-n} O(|Q(x,r)|),$$

где O равномерное на F_l. Покроем множество $Z \cap F_l$ двоичными кубами $\{Q_i\}$ так, чтобы диаметр каждого из них не превосходил $r < r_0(F_l)$. Тогда

$$\mathcal{H}^k_{\varepsilon r}(f(Z \cap F_l)) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^k_{\varepsilon r}(f(Q_i)) \le \varepsilon^{k-n} \sum_{i\in\mathbb{N}} O(|Q_i|) \le \varepsilon^{k-n} C_l^n |V_l|.$$

В силу произвола в выборе ε получаем $\mathcal{H}^k(f(Z \cap F_l)) = 0$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Для завершения доказательства остается применить теорему 1.11.

3.13. Лемма. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^k$ — *открытое множество,* $Z \subset U$ — *множество нулевой меры, а* $g : U \to \mathbb{R}$ — *непрерывная на* $U \setminus Z$ *функция. Тогда*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} g(y)\,dy = g(x) \tag{3.5}$$

для любой точки $x \in U \setminus Z$.

Если $g : U \to \mathbb{R}$ — *непрерывная на* U *функция, то сходимость в* (3.5) *будет равномерной на всяком компактном множестве* $F \subset U$.

Доказательство. Действительно, если $x \in U \setminus Z$ — точка непрерывности функции g, то $|g(y) - g(x)| = o(1)$ при $U \setminus Z \ni y \to x$. Поэтому

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} g(y)\,dy - g(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} (g(y) - g(x))\,dy\right| \\ &\le \frac{1}{|Q(x,r)\setminus Z|} \int\limits_{Q(x,r)\setminus Z} |g(y)-g(x)|\,dy = o(1) \quad (3.6)\end{aligned}$$

при $U \setminus Z \ni y \to x$.

Заметим, что по теореме Кантора всякая непрерывная на U функция $g : U \to \mathbb{R}$ является равномерно непрерывной на любом компактном подмножестве $F \subset U$. Следовательно, правая часть $o(1)$ в (3.6) будет равномерной относительно $x \in F$.

Напомним, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ множество $A \subset \mathbb{R}^k$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда оно $\mathcal{H}^k$-измеримо по Каратеодори. Ниже мы доказываем одно обобщение этого свойства.

Ниже мы используем свойства, сформулированные в следующем предложении.

3.14. Предложение. *1. При непрерывном отображении:*

a) прообраз открытого или замкнутого множеств соответственно открыт или замкнут;

b) образ компактного множества компактен;

c) образ и прообраз борелевского множества борелевские (следует из a) и b), т. к. борелевское множество может быть представлено в виде счетного объединения компактных множеств).

2. При гомеоморфизме:

a) образ и прообраз открытого или замкнутого множеств соответственно открыты или замкнуты;

b) образ и прообраз компактного множества компактны;

c) образ и прообраз борелевского множества борелевские.

3.15. Формула площади. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^k$ *— открытое множество, а* $f : U \to \mathbb{R}^m,\ k \le m,$ *— инъективное отображение класса* C^1. *Пусть* $Z = \{x : \mathcal{J}(x, f) = 0\}$. *Тогда*

1) *множество* $A \subset U \setminus Z$ *измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда множество* $f(A)$ $\mathcal{H}^k$*-измеримо по Каратеодори, и при этом справедливо равенство*

$$\int\limits_A \mathcal{J}(x, f)\, dx = \mathcal{H}^k(f(A)); \tag{3.7}$$

2) *множество* $A \subset U \setminus Z$ *имеет нулевую меру Лебега тогда и только тогда, когда множество* $f(A)$ *имеет нулевую* $\mathcal{H}^k$*-меру;*

3) *если* $S \subset f(U)$ *— множество нулевой* $\mathcal{H}^k$*-меры, то* $\mathcal{J}(x, f) = 0$ *почти всюду на множестве* $f^{-1}(S)$.

Доказательство. Докажем справедливость равенства (3.7) для всякого открытого ограниченного множества $\Omega \Subset U$ (таким образом, $\overline{\Omega}$ — компакт). Образ $f(\Omega)$ является борелевским множеством, так как $f(\Omega)$ может быть представлено в виде счетного объединения компактных множеств (см. предложение 3.14). Следовательно, $f(\Omega)$ $\mathcal{H}^k$-измеримо по Каратеодори, см. теорему 2.3. В каждой точке $x \in \overline{\Omega}$ одновременно имеем равномерный по $x \in \overline{\Omega}$ предел (3.3):

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x,r)))}{|Q(x,r)|} = \mathcal{J}(x, f),$$

и вытекающий из (3.5) равномерный по $x \in \overline{\Omega}$ предел

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} \mathcal{J}(y, f)\, dy = \mathcal{J}(x, f).$$

Отсюда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $r_0 > 0$ такое, что в каждой точке $x \in \Omega$ имеем

$$\left| \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x,r)))}{|Q(x,r)|} - \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} \mathcal{J}(y,f)\,dy \right| \leq \frac{1}{m} \tag{3.8}$$

для всех $r \in (0, r_0)$.

По свойству 3.1 для всех $n \geq n_0$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ — некоторое число, существует непустой набор $\mathcal{M}_n$ двоичных кубов, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\mathcal{M}_n = \{Q \in \mathcal{D}_n : \overline{Q} \subset \Omega\}$;

2) множество $M_n = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{M}_n} Q \subset \Omega$ борелевское;

3) $M_n \subset M_{n+1}$;

4) $\bigcup\limits_{n \geq n_0} M_n = \Omega$;

5) $\lim\limits_{n \to \infty} |M_n| = |\Omega|$.

В силу вышесказанного, оценка (3.8) выполняется для всех кубов $Q \in \mathcal{M}_n$, если только $\frac{1}{2^{n+1}} < r_0$.

Из формулы (3.8) для любого куба $Q \in \mathcal{M}_n$ при $\frac{1}{2^{n+1}} < r_0$ имеем

$$-\frac{|Q|}{m} \leq \mathcal{H}^k(f(Q)) - \int\limits_Q \mathcal{J}(y,f)\,dy \leq \frac{|Q|}{m}. \tag{3.9}$$

Суммируя формулу (3.9) по всем кубам $Q \in \mathcal{M}_n$, получаем

$$-\frac{|\Omega|}{m} \leq -\frac{|M_n|}{m} \leq \mathcal{H}^k(f(M_n)) - \int\limits_{M_n} \mathcal{J}(y,f)\,dy \leq \frac{|M_n|}{m} \leq \frac{|\Omega|}{m}. \tag{3.10}$$

Формула (3.10) справедлива для всех достаточно больших n, поэтому в ней возможен предельный переход при $n \to \infty$:

$$-\frac{|\Omega|}{m} \leq \mathcal{H}^k(f(\Omega)) - \int\limits_\Omega \mathcal{J}(y,f)\,dy \leq \frac{|\Omega|}{m}. \tag{3.11}$$

Формула (3.11) справедлива для всех $m \in \mathbb{N}$, поэтому соотношение (3.7) для открытого множества указанного выше вида доказана.

Заметим, что произвольное открытое множество $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, где открытое множество $\Omega_n = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}$ и $|x|_\infty < n\}$ компактно вложено в Ω. Поскольку для открытого множества Ω_n формула

(3.7) уже доказана, то она распространяется и на множество Ω, так как $\mathcal{H}^k(f(\Omega)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{H}^k(f(\Omega_n))$, а предельный переход в интеграле слева в случае $\sup\limits_n \int\limits_{\Omega_n} \mathcal{J}(x,f)\,dx < \infty$ возможен по теореме Беппо Леви (в противном случае все очевидно).

По лемме 2.10 мера Лебега — регулярная борелевская мера. Поэтому по лемме 1.23 для всякого измеримого по Лебегу множества $A \subset U \setminus Z$ существует некоторое борелевское множество $\Omega_\sigma \supset A$, причем $\Omega_\sigma = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, где $\{\Omega_n \subset U\}$, $n \in \mathbb{N}$, — убывающая последовательность открытых множеств, а множество $S = \Omega_\sigma \setminus A$ имеет нулевую меру Лебега. Тогда равенство (3.7) можно распространить на произвольные измеримые по Лебегу множества $A \subset U \setminus Z$. Действительно, $\Omega_\sigma = A \cup S$. Поэтому $\mathcal{H}^k(f(\Omega_\sigma)) \leq \mathcal{H}^k(f(A)) + \mathcal{H}^k(f(S)) = \mathcal{H}^k(f(A))$, так как отображение f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина (см. следствие 3.7). Заметим при этом, что множество $f(A)$ $\mathcal{H}^k$-измеримо по Каратеодори.

Если $S \subset f(U)$ — множество нулевой $\mathcal{H}^k$-меры, то по лемме 1.23 и по теореме 2.10 существует борелевское множество $W_\sigma \supset S$ такое, что $\mathcal{H}^k(W_\sigma) = 0$. При этом

$$W_\sigma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n,$$

где $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_n \supset \ldots$ — убывающая последовательность открытых множеств. Для любого W_n имеем

$$\int\limits_{f^{-1}(W_n)} \mathcal{J}(x,f)\,dx = \mathcal{H}^k(W_n).$$

Так как $\mathcal{H}^k(W_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\int\limits_{f^{-1}(W_\sigma)} \mathcal{J}(x,f)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{f^{-1}(W_n)} \mathcal{J}(x,f)\,dx = 0.$$

Поэтому $\mathcal{J}(x,f) = 0$ почти всюду на множестве $f^{-1}(W_\sigma)$, а следовательно, и на множестве $f^{-1}(S)$.

Отсюда вытекает, что если множество $f(A)$, $A \subset U \setminus Z$, $\mathcal{H}^k$-измеримо по Каратеодори, то множество A измеримо по Лебегу. Действительно, пусть $F_\delta \subset f(A)$ — борелевское множество такое, что $\mathcal{H}^k(F_\delta) =$

$\mathcal{H}^k(f(A))$ и при этом
$$F_\delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n,$$
где $F_1 \subset F_2 \subset \ldots F_n \ldots \subset f(A)$ — возрастающая последовательность замкнутых множеств (см. теорему 1.18). Для любого $n \in \mathbb{N}$ прообраз $f^{-1}(F_n)$ — замкнутое множество (см. 3.14), поэтому $K_\delta = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(F_n)$ — борелевское множество; при этом $f^{-1}(F_\delta) = K_\delta$. Поскольку $A \setminus K_\delta = f^{-1}(f(A) \setminus F_\delta)$, то из $\mathcal{H}^k(f(A) \setminus F_\delta) = 0$ вытекает, что $\mathcal{J}(x, f) = 0$ почти всюду на множестве $A \setminus K_\delta$. Следовательно, $|A \setminus K_\delta| = 0$, так как по условию $\mathcal{J}(x, f) > 0$ на множестве A. Таким образом, множество A отличается от борелевского множества K_δ на множество $A \setminus K_\delta$ нулевой меры Лебега, и поэтому измеримо по Лебегу.

Формула площади доказана.

3.16. Задача. Проверить равенство (3.10): а именно, что $\bigcup\limits_{Q\in M_n} f(Q) = f(M_n)$.

3.17. Определение. Совокупность $(\mathbb{X}, \Xi, \mathcal{H}^k)$, где Ξ — σ-алгебра $\mathcal{H}^k$-измеримых множеств (она же и дробящаяся система), образует множество с мерой. Функция $u : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ называется $\mathcal{H}^k$-интегрируемой на $\mathbb{X}$, если она интегрируема по $\mathcal{H}^k$-мере Хаусдорфа на множестве в мерой $(\mathbb{X}, \Xi, \mathcal{H}^k)$. Совокупность $\mathcal{H}^k$-интегрируемых на $\mathbb{X}$ функций будем обозначать символом $\mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$.

Заметим, что на пространстве $\mathbb{R}^k$ интегрируемость по $\mathcal{H}^k$-мере Хаусдорфа совпадает с интегрируемостью по Лебегу.

3.18. Формула замены переменной для интегрируемых функций. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество и $f : U \to \mathbb{R}^m$, $k \le m$, — инъективное отображение класса C^1. Функция $u : f(U) \to \mathbb{E}$ (здесь $\mathbb{E}$ может быть произвольным банаховым пространством) $\mathcal{H}^k$-интегрируема на $f(U)$ тогда и только тогда, когда функция $U \ni x \mapsto u(f(x))\mathcal{J}(x, f) \in \mathbb{E}$ интегрируема по Лебегу на U, и при этом*
$$\int\limits_U u(f(x))\mathcal{J}(x, f)\, dx = \int\limits_{f(U)} u(y)\, d\mathcal{H}^k(y). \tag{3.12}$$

Доказательство. Заметим, что при $k = m$ сформулированная теорема совпадает с уже доказанной формулой замены переменной в интеграле Лебега.

Пусть $u \in \mathcal{L}_1(f(U), \mathbb{E})$ и последовательность $\varphi_n \in \mathrm{Step}(f(U); \mathbb{E})$ такова, что

$$\|u - \varphi_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и $\varphi_n(y) \to u(y)$ при $n \to \infty$ за исключением некоторого множества $S \subset f(U)$ нулевой $\mathcal{H}^k$-меры (интегральная норма тоже берется относительно меры $\mathcal{H}^k$). По теореме 2.4 можно считать, что все дизъюнктные элементы дробящейся системы Ξ, на которых сосредоточена ступенчатая функция $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, являются борелевскими. Из (3.7) вытекает

$$\int\limits_U \chi_P(f(x))\mathcal{J}(x, f)\, dx = \int\limits_{f^{-1}(P)} \mathcal{J}(x, f)\, dx = \mathcal{H}^k(P) = \int\limits_{f(U)} \chi_P(y)\, d\mathcal{H}^k(y) \tag{3.13}$$

для любого борелевского множества $P \subset f(U)$ (так как прообраз борелевского множества является борелевским, см. 3.14). Следовательно, формула (3.12) справедлива для любой ступенчатой функции $\varphi_n \in \mathrm{Step}(f(U); \mathbb{E})$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\int\limits_U \varphi_n(f(x))\mathcal{J}(x, f)\, dx = \int\limits_{f(U)} \varphi_n(y)\, d\mathcal{H}^k(y). \tag{3.14}$$

Из (3.14) имеем равенство

$$\int\limits_U |\varphi_n(f(x)) - \varphi_l(f(x))|\mathcal{J}(x, f)\, dx = \int\limits_{f(U)} |\varphi_n(y) - \varphi_l(y)|\, d\mathcal{H}^k(y),$$

из которого вытекает, что последовательность $\varphi_n(f(x))\mathcal{J}(x, f)$ является фундаментальной в $\mathcal{L}_1(U; \mathbb{E})$. Так как $\mathcal{J}(x, f) = 0$ для почти всех точек $x \in f^{-1}(S)$ (см. 3.15), то в силу выбора последовательности φ_n

$$\varphi_n(f(x))\mathcal{J}(x, f) \to u(f(x))\mathcal{J}(x, f)$$

в почти всех точках $x \in U$ при $n \to \infty$. Таким образом, предел последовательности $\{\varphi_n(f(x))\mathcal{J}(x, f)\}$ в $\mathcal{L}_1(U; \mathbb{E})$ равен $u(f(x))\mathcal{J}(x, f)$ почти всюду (поскольку всякая последовательность, сходящаяся в $\mathcal{L}_1$ к некоторой функции, содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к той же функции поточечно). Переходя в (3.14) к пределу при $n \to \infty$, получаем равенство (3.12).

Пусть теперь функция $u : f(U) \to \mathbb{E}$ такова, что функция $U \ni x \mapsto u(f(x))\mathcal{J}(x,f)$ интегрируема по Лебегу на U. Тогда существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_n \in \mathrm{Step}(\mathbb{R}^k;\mathbb{E})$ такая, что

$$\|u(f(\cdot))\mathcal{J}(\cdot,f) - \varphi_n(\cdot)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и $\varphi_n(x) \to u(f(x))\mathcal{J}(x,f)$ при $n \to \infty$ за исключением некоторого множества $S \subset U$ нулевой меры Лебега.

Положим $Z = \{x \in U : \mathcal{J}(x,f) = 0\}$ и рассмотрим произвольное компактное множество $A \subset U \setminus Z$. Поскольку

$$0 < \alpha = \inf_{x\in A} \mathcal{J}(x,f) \quad \text{и} \quad \beta = \sup_{x\in A} \mathcal{J}(x,f) < \infty$$

(см. 3.14), то последовательность функций $\varphi_n(x)\mathcal{J}^{-1}(x,f)$ сходится почти всюду к функции $u(f(x))$ на A при $n \to \infty$, а также

$$\int\limits_A |\varphi_n(x)\mathcal{J}^{-1}(x,f) - u(f(x))|\,dx \to 0$$

при $n \to \infty$, так как

$$\int\limits_A |\varphi_n(x)\mathcal{J}^{-1}(x,f) - u(f(x))|\,dx \le \alpha^{-1} \int\limits_A |\varphi_n(x) - u(f(x))\mathcal{J}(x,f)|\,dx$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что по теореме 3.15 каждая из функций

$$f(A) \ni y \mapsto \varphi_n(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f)$$

(отображение f^{-1} существует, т.к. f инъективно) $\mathcal{H}^k$-интегрируема на $f(A)$.

Действительно, из 3.15 следует

$$\int\limits_U \varphi(f(x))\mathcal{J}(x,f)\,dx = \int\limits_{f(U)} \varphi(y)\,d\mathcal{H}^k(y). \tag{3.15}$$

Положим $y = f(x)$. Тогда, применяя (3.15), получаем

$$\int\limits_A \varphi_n(x)\,dx = \int\limits_A \varphi_n(f^{-1}(f(x))\mathcal{J}(x,f)\mathcal{J}^{-1}((f^{-1}(f(x)),f)\,dx$$

$$= \int\limits_{f(A)} \varphi_n(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f)\,d\mathcal{H}^k(y).$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f)$$

$\mathcal{H}^k$-интегрируема на $f(A)$, так как $\varphi_n(f^{-1}(y))$ — ступенчатая функция, а $\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f)$ — непрерывная ограниченная функция.

Таким образом, в силу доказанного

$$\int\limits_A \varphi_n(x)\,dx = \int\limits_{f(A)} \varphi_n(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f)\,d\mathcal{H}^k(y)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\begin{aligned}&\int\limits_A |\varphi_n(x) - \varphi_l(x)|\,dx\\ &= \int\limits_{f(A)} |\varphi_n(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f) - \varphi_l(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f)|\,d\mathcal{H}^k(y),\end{aligned}$$

и поэтому последовательность функций

$$\varphi_n(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f) : f(A) \to \mathbb{E}$$

является фундаментальной на множестве с мерой $(f(A),\Xi,\mathcal{H}^k)$. Заметим, что предел этой последовательности в $\mathcal{L}_1(f(A);\mathbb{E})$ почти всюду совпадает с ее поточечным пределом при $n \to \infty$. Поскольку отображение f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, то $\varphi_n(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y),f)$ сходится $\mathcal{H}^k$-почти всюду на $f(A)$ к функции $u(y)$. Таким образом, доказана $\mathcal{H}^k$-интегрируемость функции $u(y)$ на множестве $f(A)$ и равенство

$$\int\limits_A u(f(x))\mathcal{J}(x,f)\,dx = \int\limits_{f(A)} u(y)\,d\mathcal{H}^k(y).$$

Если теперь $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset U \setminus Z$ — исчерпывание множества $U \setminus Z$ компактными множествами: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U \setminus Z$, то (с учетом $\mathcal{H}^k(f(Z))=0$) получаем

$$\int\limits_{f(U)} u(y)\,d\mathcal{H}^k(y) = \int\limits_{f(U\setminus Z)} u(y)\,d\mathcal{H}^k(y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{f(A_n)} u(y)\,d\mathcal{H}^k(y) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} u(f(x))\mathcal{J}(x,f)\,dx$$

$$= \int\limits_{U\setminus Z} u(f(x))\mathcal{J}(x,f)\,dx = \int\limits_{U} u(f(x))\mathcal{J}(x,f)\,dx.$$

Таким образом, $\mathcal{H}^k$-интегрируемость функции $u : f(U) \to \mathbb{E}$ доказана, а вместе с нею доказана и формула замены переменной.

Из доказанной теоремы 3.18 так же, как и при $k=m$, вытекает

3.19. Формула замены переменной для измеримых функций. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество и $f : U \to \mathbb{R}^m$, $k \le m$, — инъективное отображение класса C^1. Неотрицательная функция $u : f(U) \to \mathbb{R}$ $\mathcal{H}^k$-измерима на $f(U)$ тогда и только тогда, когда функция $U \ni x \mapsto u(f(x))\mathcal{J}(x,f) \in [0,\infty]$ измерима по Лебегу на U, и при этом*

$$\int\limits_{U} u(f(x))\mathcal{J}(x,f)\,dx = \int\limits_{f(U)} u(y)\,d\mathcal{H}^k(y). \tag{3.16}$$

4. Применения формулы площади

4.1. Длина кривой. *Пусть $[a,b]$ — отрезок из $\mathbb{R}$, $f=(f_1,\dots,f_m) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — иньективное отображение класса $C^1([a,b])$, а $f([a,b]) = \gamma$. Тогда $\mathcal{H}^1(\gamma) = l(\gamma)$, где $l(\gamma)$ — длина кривой.*

Доказательство. Очевидно, в этом случае

$$df(t) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt}(t) \\ \dots \\ \frac{df_m}{dt}(t) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\mathcal{J}(t,f) = \sqrt{\det(df^*(t))\det(df(t))} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{df_i}{dt}(t)\Big)^2}.$$

По формуле площади получаем

$$\mathcal{H}^1(\gamma) = \int\limits_{[a,b]} \left(\sum_{i=1}^{m} \Big(\frac{df_i}{dt}(t) \Big)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt = \int\limits_a^b \left(\sum_{i=1}^{m} \Big(\frac{df_i}{dt}(t) \Big)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Заметим, что длина кривой $l(\gamma)$ гладкой кривой γ выражается такой же формулой, поэтому $\mathcal{H}^1(\gamma) = l(\gamma)$.

4.2. Площадь поверхности. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}^3$ — инъективное отображение класса $C^1(U)$. Тогда двумерная площадь поверхности $f(U)$ выражается формулой*

$$\mathcal{H}^2(f(U)) = \iint\limits_U \sqrt{E(x_1,x_2)G(x_1,x_2) - F^2(x_1,x_2)}\, dx_1\, dx_2,$$

где

$$E(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2),\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right),$$
$$G(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) \right),$$
$$F(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) \right).$$

Доказательство. Очевидно, в этом случае

$$df(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1,x_2) \end{pmatrix}.$$

Отсюда прямое вычисление дает

$$df^*(x)df(x) = \begin{pmatrix} E(x_1,x_2) & F(x_1,x_2) \\ F(x_1,x_2) & G(x_1,x_2) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\det(df^*(x)df(x)) = E(x_1,x_2)G(x_1,x_2) - F^2(x_1,x_2)$. Далее остается только применить формулу площади.

4.3. Площадь поверхности графика функции. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $f : U \to \mathbb{R}$ — инъективное отображение* *класса* $C^1(U)$, $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{k+1},\ x \in U\}$ — *график функции* f. *Тогда* k*-мерная площадь поверхности графика функции* f *выражается формулой*

$$\mathcal{H}^k(\Gamma) = \int\limits_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx,$$

где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right)$.

Доказательство. Для доказательства формулы рассмотрим отображение $g : U \to \Gamma$, такое, что $g(x) = (x, f(x))$. Отсюда получаем, что

$$dg(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & & & \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $\det(dg^*(x)dg(x))$ применим теорему 2.14. Получим $\det(dg^*(x)dg(x)) = 1 + |\nabla f|^2$. Далее остается только применить формулу площади.

4.4. Площадь поверхности сферы.

$$\sigma_{k-1} = \omega_k \cdot k,$$

где σ_{k-1} — *площадь единичной* k*-мерной сферы,* ω_k — *объем* k*-мерного единичного шара.*

Доказательство. Рассмотрим сферу $S_R = S(0, R) \subset \mathbb{R}^k$ радиуса R, ограничивающую шар $B(0, R) \subset \mathbb{R}^k$. Заметим, что $\mathcal{H}^{k-1}(S_R) = R^{k-1} \cdot \mathcal{H}^{k-1}(S_1)$. Посчитаем меру кольца $A_{R,1} = B(0, R) \setminus B(0, 1)$:

$$|A_{R,1}| = \int\limits_{A_{R,1}} dx = |B(0, R)| - |B(0, 1)| = \omega_k(R^k - 1).$$

Теперь посчитаем меру этого же кольца, используя формулу замены переменной. Рассмотрим отображение f, заданное следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\ . \\ . \\ x_{k-1} = r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{k-1}\cos\varphi_{k-1} \\ x_k = r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{k-1}\sin\varphi_{k-1}, \end{cases}$$

$1 \le r \le R$, $0 \le \varphi_i \le \pi$, $i = 1, \ldots, k-2$, $0 \le \varphi_{k-1} \le 2\pi$. Тогда по формуле замены переменной объем кольца будет равен

$$\iint\limits_{[1,R]\times\Omega} \mathcal{J}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, f)\, dr\, d\varphi_1 \ldots\, d\varphi_{k-1}.$$

(Здесь множество $\Omega = \{\varphi_i,\ i = 1, \ldots, k-1 : \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2} \in [0,\pi],\ \varphi_{k-1} \in [0, 2\pi]\}$.)

Заметим, что все векторы $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}$ лежат в касательном пространстве к сфере, а $\frac{\partial f}{\partial r}$ ортогонален ей и длина этого вектора равна 1. Из геометрического смысла якобиана (объем параллелепипеда), видно, что $J(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, f) = \mathcal{J}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, f(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}))$ при каждом фиксированном r в любой точке $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) \in \Omega$, так как «высота» параллелепипеда, натянутого на векторы $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_{k-1}}$, равна 1. Отсюда с учетом соотношения

$$\mathcal{J}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, f(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1})) \\ = r^{n-1}\mathcal{J}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, f(1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}))$$

получаем

$$
\begin{aligned}
|A_{R,1}| &= \iint\limits_{[1,R]\times\Omega} J(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1},f)\,dr\,d\varphi_1\dots\,d\varphi_{k-1} \\
&= \iint\limits_{[1,R]\times\Omega} r^{k-1}\mathcal{J}(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1},f(1,\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1}))\,dr\,d\varphi_1\dots\,d\varphi_{k-1} \\
&= \int\limits_1^R r^{k-1}\int\limits_\Omega \mathcal{J}(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1},f(1,\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1}))\,d\varphi_1\dots\,d\varphi_{k-1}\,dr \\
&= \int\limits_1^R r^{k-1}\mathcal{H}^{k-1}(S_1)\,dr = \sigma_{k-1}\int\limits_1^R r^{k-1}\,dr = \frac{\sigma_{k-1}}{k}(R^k-1),
\end{aligned}
$$

так как по формуле площади

$$
\mathcal{H}^{k-1}(S_1) = \int\limits_\Omega \mathcal{J}(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1},f(1,\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1}))\,d\varphi_1\dots\,d\varphi_{k-1}.
$$

Сравнивая полученный результат с первым равенством, имеем $\sigma_{k-1} = \omega_k\cdot k$.

4.5. Задача. Пусть $M\subset\mathbb{R}^m$ — k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, а $\mathcal{H}^k\llcorner M$ — k-мерная мера Хаусдорфа на M. Написать формулу площади в некоторой фиксированной системе координат $\varphi : U\to V$, где U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^m$, такой, что $\varphi(U\cap M)=\{V : x_{k+1} = \ldots = x_m = 0\}$

Указание: Рассмотреть параметризацию

$$
\psi = \varphi^{-1} : \{V : x_{k+1} = \ldots = x_m = 0\}\to U\cap M
$$

многообразия M и применить формулу площади к отображению $\psi : W\to M\cap U$, где $W = \{V : x_{k+1} = \ldots = x_m = 0\}\subset\mathbb{R}^k$. Множество $A\subset M\cap U$ $\mathcal{H}^k\llcorner M$-измеримо по Каратеодори тогда и только тогда, когда множество $\varphi(A)$ измеримо по Лебегу, и при этом справедливо равенство

$$
\mathcal{H}^k(A) = \int\limits_{\varphi(A)} \mathcal{J}(x,f)\,dx = \int\limits_{\varphi(A)} \sqrt{\det(d\psi^*(x)d\psi(x))}\,dx.
$$

4.6. Задача. Ко всем приведенным в этом разделе формулам площади написать и доказать соответствующие формулы замены переменной. Например, интеграл Лебега в полярной системе координат: функция $u \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k, \mathbb{E})$ тогда и только тогда, когда функция u $\mathcal{H}^{k-1}$-интегрируема на S_r для почти всех $r \in (0, \infty)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} u(x)\, dx = \int\limits_0^\infty r^{k-1}\, dr \int\limits_{S_1} u(r\omega)\, d\mathcal{H}^{k-1}(\omega) = \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{S_r} u(\omega)\, d\mathcal{H}^{k-1}(\omega)$$

5. Вторая лемма Пуанкаре

Предположим, что $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i\, dx_i$ — форма первой степени на $\mathbb{R}^n$, оказавшаяся равной $df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$. Очевидно, можно считать, что $f(0) = 0$. Заметим, что

$$f(x) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i\, dt = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x_i\, dt.$$

Это наводит на мысль, что для отыскания f по заданному ω следует рассмотреть функцию $I\omega$, определяемую равенством

$$I\omega(x) = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x_i\, dt.$$

Заметим, что для того, чтобы определение $I\omega$ имело смысл, нужно лишь, чтобы ω было определено на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, обладающим тем свойством, что вместе со всяким $x \in A$ весь прямолинейный отрезок, соединяющий 0 и x, содержится в A. Такое открытое множество называется *звездным* относительно 0. Довольно сложное вычисление показывает, что (на звездном открытом множестве) равенство $\omega = d(I\omega)$ действительно имеет место, лишь бы ω удовлетворяло необходимому условию $d\omega = 0$. Это вычисление, равно как и $I\omega$, можно значительно обобщить.

5.1. Теорема. *Всякая замкнутая форма на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, звездном относительно 0, точна.*

Доказательство. Мы определим функцию I, относящую всякой форме l-й степени некоторую форму $(l-1)$-й степени (для каждого l) так, что $I(0)=0$ и $\omega = I(\,d\omega) + d(I\omega)$ для всякой формы ω. При $d\omega = 0$ будем иметь тогда $\omega = d(I\omega)$. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_l} \omega_{i_1,\ldots,i_l}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_{i_l}.$$

Так как A звездно, то можно положить

$$I\omega(x) =$$
$$\sum_{i_1<\ldots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \Bigl(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\, dt \Bigr) x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}.$$

Тождество $\omega = I(\,d\omega) + d(I\omega)$ доказывается прямым вычислением. Используя правило Лейбница, имеем

$$d(I\omega) = l \cdot \sum_{i_1<\ldots<i_l} \Bigl(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\, dt \Bigr) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} +$$
$$\sum_{i_1<\ldots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \Bigl(\int_0^1 t^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)\, dt \Bigr) \times$$
$$x_{i_\alpha}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}.$$

(Почему вместо t^{l-1} появилось t^l?) С другой стороны,

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_{i_1,\ldots,i_l})\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}$$

и, применяя I к форме $(l+1)$-й степени $d\omega$, получаем

$$I(\,d\omega) = \sum_{i_1<\ldots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\int_0^1 t^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)\, dt \Bigr) x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}$$
$$- \sum_{i_1<\ldots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \Bigl(\int_0^1 t^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)\, dt \Bigr) \times$$
$$x_{i_\alpha}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}.$$

При сложении полученных выражений тройные суммы взаимно уничтожаются и мы будем иметь

$$d(I\omega) = \sum_{i_1<\ldots<i_l} l \cdot \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\, dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} +$$

$$\sum_{i_1<\ldots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)\, dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} =$$

$$\sum_{i_1<\ldots<i_l} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \big[t^l \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx) \big]\, dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} =$$

$$\sum_{i_1<\ldots<i_l} \omega_{i_1,\ldots,i_l}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} = \omega.$$

6. Формула коплощади

6.1. Формула коплощади. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $\varphi : U \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1. Пусть еще $f : U \to \mathbb{E}$ — измеримая функция. Тогда, если $f(x)|\nabla\varphi(x)|$ интегрируема, то справедлива формула*

$$\int_U f(x)|\nabla\varphi(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\varphi^{-1}(t)} f(y)\, d\mathcal{H}^{k-1}(y).$$

6.2. Замечание. *В случае, когда $\varphi = x_i$ — координатная функция, то мы получаем теорему Фубини ($\varphi^{-1}(x_i)$ — гиперплоскость; $\mathcal{H}^{k-1}$ — $(k-1)$-мерная мера Лебега на ней).*

Доказательство 6.1. Обозначим $Z = \{x \in U : |\nabla\varphi(x)| = 0\}$ и рассмотрим открытое множество $U_0 = U \setminus Z$. Для любого $x \in U_0$ существует $r_0(x)$ такое, что $|\nabla\varphi(y)| \neq 0$ для всякого $y \in B(x, r_0(x))$.

Заметим, что, если $x \in U_0$, то $|\nabla\varphi(x)| \neq 0$ и, следовательно, существует i такое, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \neq 0$. Поэтому $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y) \neq 0$ для всех y из некоторого шара $B(x, r(x)) \subset U_0$, $r(x) \leq r_0(x)$.

Шары $\{B(x,r) : x \in U_0,\, r \leq r_0(x)\}$ образуют покрытие Витали множества U_0. Выберем дизъюнктную систему $\{B_n = B(x_n, r_n)\}$ шаров такую, что $|U_0 \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n| = 0$, и докажем, что для любого шара B_n верно

$$\int\limits_{B_n} f(x)|\nabla\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap B_n} f(y)\,d\mathcal{H}^{k-1}(y).$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и допустим, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(y) \neq 0$ для всех $y \in B_n$. Рассмотрим отображение g, заданное следующим образом:

$$B_n \ni x = (x_1, \ldots,\ x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \ldots,\ x_{k-1}, \varphi(x)).$$

Отображение g непрерывно дифференцируемо. Покажем, что g взаимно однозначно.

Действительно, пусть

$$(x_1, \ldots, x_{k-1}, \varphi(x)) = (y_1, \ldots, y_{k-1}, \varphi(y)).$$

Отсюда следует, что $x_i = y_i$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$, и

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \varphi(y_1, \ldots, y_k) = \varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k).$$

Из того, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(z) \neq 0$ для всех $z \in B_n$, следует, что $\varphi(z)$ монотонна по x_k на шаре B_n при фиксированных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ и поэтому $x_k = y_k$.

Заметим, что якобиан $J(x, g)$ невырожден на B_n, поэтому по теореме об обратной функции отображение g является диффеоморфизмом. Отображение g имеет следующую структуру:

$$\varphi^{-1}(t) \ni x = (x_1, \ldots,\ x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \ldots,\ x_{k-1}, t).$$

Обозначим через $W = g(B_n)$ образ B_n при отображении g, а символом $\mathbb{R}^{k-1}_t = \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^k : \tilde{y} = \{y_1, \ldots, y_{k-1}, t\}\}$ — плоскость $\{y_k = t\}$. Рассмотрим действие g^{-1} на множестве $W \cap \mathbb{R}^{k-1}_t$. Легко заметить, что

$$\varphi^{-1}(t) = g^{-1}(W \cap \mathbb{R}^{k-1}_t) = \{x \in B_n : \varphi(x) = t\}. \tag{6.1}$$

По формуле замены переменной и теореме Фубини получаем

$$\int\limits_{B_n} f(x)|\nabla\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{W} f(g^{-1}(y))|\nabla\varphi(g^{-1}(y))||J(y, g^{-1})|\,dy$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{W\cap\{y_k=t\}} f(g^{-1}(\tilde{y}))|\nabla\varphi(g^{-1}(\tilde{y}))||J(\tilde{y}, g^{-1})|\,d\tilde{y}, \tag{6.2}$$

где $d\tilde{y} = dy_1 \dots dy_{k-1}$, а $\tilde{y} = (y_1, ..., y_{k-1}, t)$.

Фиксируем $t \in \mathbb{R}$ и рассмотрим векторы

$$h_i = dg^{-1}(\tilde{y})(e_i),\ i = 1, \dots, k-1,$$

лежащие в касательной плоскости к поверхности $\varphi^{-1}(t)$ в точке $g^{-1}(\tilde{y})$ (см. (6.1)) (здесь e_i, $i = 1, \dots, k$, — векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^k$). Единичная нормаль к этой поверхности равна

$$\frac{\nabla\varphi(g^{-1}(\tilde{y}))}{|\nabla\varphi(g^{-1}(\tilde{y}))|},$$

а длина проекции вектора $dg^{-1}(\tilde{y})(e_k)$ на эту нормаль равна

$$\Big\langle \frac{\nabla\varphi(g^{-1}(\tilde{y}))}{|\nabla\varphi(g^{-1}(\tilde{y}))|},\ dg^{-1}(\tilde{y})(e_k) \Big\rangle = h.$$

Используя геометрический смысл якобиана $dg^{-1}(y)$ (объем параллелепипеда, натянутого на векторы $dg^{-1}(\tilde{y})(e_i)$, $i = 1, \dots, k$) имеем

$$|J(\tilde{y}, g^{-1})| = \mathcal{J}(\tilde{y}, g^{-1})h,$$

(здесь «основание» — $(k-1)$-мерный параллелепипед, натянутый на векторы h_i, $i = 1, \dots, k-1$, и имеющий $(k-1)$-мерную меру $\mathcal{J}(\tilde{y}, g^{-1})$, а h — его «высота»). Поэтому равенство (6.2) можно переписать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{W\cap\{y_k=t\}} f(g^{-1}(y))\mathcal{J}(y, g^{-1})\Big\langle \nabla\varphi(g^{-1}(y)), dg^{-1}(y)(e_k)\Big\rangle\, d\tilde{y}.$$

Учитывая, что $g \circ g^{-1} = I$ — тождественное отображение, получаем $\varphi(g^{-1}(y)) = y_k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 = \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(g^{-1}(y)) &= \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(g^{-1}(y))\frac{\partial g_j^{-1}(y)}{\partial y_k}(y) \\ &= \Big\langle \nabla\varphi(g^{-1}(y)), dg^{-1}(y)(e_k)\Big\rangle. \end{aligned}$$

Поэтому по формуле замены переменной и (6.1) имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{W\cap\{y_k=t\}} f(g^{-1}(y))\mathcal{J}(y, g^{-1})\Big\langle \nabla\varphi(g^{-1}(y)), dg^{-1}(y)(e_k)\Big\rangle\, d\tilde{y} \\ &\qquad = \int\limits_{W\cap\{y_k=t\}} f(g^{-1}(y))\mathcal{J}(y, g^{-1})\, d\tilde{y} = \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} f(x)\, d\mathcal{H}^{k-1}(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{B_n} f(x)|\nabla\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap B_n} f(y)\,d\mathcal{H}^{k-1}(y).$$

Просуммируем это равенство по всем B_n. Получим (напомним, что мера множества $E = U_0 \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_n$ равна 0)

$$\begin{aligned}\int\limits_{U} f(x)|\nabla\varphi(x)|\,dx &= \int\limits_{U_0} f(x)|\nabla\varphi(x)|\,dx \\ &= \int\limits_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n} f(x)|\nabla\varphi(x)|\,dx + \int\limits_{E} f(x)|\nabla\varphi(x)|\,dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap B_n} f(y)\,d\mathcal{H}^{k-1}(y) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\setminus E} f(y)\,d\mathcal{H}^{k-1}(y) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} f(y)\,d\mathcal{H}^{k-1}(y).\end{aligned}$$

Последний переход возможен при условии, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap E} f(y)\,d\mathcal{H}^{k-1}(y) = 0.$$

Докажем это равенство. Его достаточно доказать при условии, что множество E содержится в компактной части множества U_0. Фиксируем $\varepsilon > 0$, и рассмотрим открытое ограниченное множество $V \supset E$ такое, что $\overline{V} \subset U_0$ и $|V| < \varepsilon$. Заметим, что, если $x \in V$, то $0 < |\nabla\varphi(x)| < M$ для некоторой постоянной M, не зависящей от x, и, следовательно, существует i такое, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \neq 0$. Поэтому $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y) \neq 0$ для всех y из некоторого шара $B(x, 4r(x))$ такого, что $4r(x) \leq r_0(x)$ и $B(x, 4r(x)) \subset V$.

Шары $\{B(x,r) : x \in V,\, r \le r(x)\}$ образуют покрытие Витали открытого множества V. Выберем по теореме Витали дизъюнктную систему $\{B_n = B(x_n,r_n)\}$ шаров такую, что $|V \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n| = 0$. Заметим, что по следствию теоремы Витали имеем также $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} 4B_n \supset V$, где $4B_n = B(x_n, 4r_n)$. По вышедоказанному верно равенство

$$\int\limits_{4B_n} |\nabla\varphi(x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap 4B_n} d\mathcal{H}^{k-1}(y).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap E} d\mathcal{H}^{k-1}(y) \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap V} d\mathcal{H}^{k-1}(y)$$

$$\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap 4B_n} d\mathcal{H}^{k-1}(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{4B_n} |\nabla\varphi(x)|\, dx$$

$$\le M \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{4B_n} dx = 4^n M \sum_{n\in\mathbb{N}} |B_n| = 4^n M|V| \le 4^n M\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap E} d\mathcal{H}^{k-1}(y) = 0.$$

Формула коплощади доказана.

7. Формула коплощади (m-мерный случай)

7.1. Лемма. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и $\theta_1, \ldots, \theta_m$ — k-мерные векторы, лежащие в одном m-мерном подпространстве $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^k$, $m \le k$. Тогда произведение объемов m-мерных параллелепипедов, натянутых на эти векторы, вычисляется по формуле*

$$V_\xi \cdot V_\theta = \left| \det \begin{pmatrix} \left\langle \xi_1,\, \theta_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \xi_1,\, \theta_m \right\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \left\langle \xi_m,\, \theta_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \xi_m,\, \theta_m \right\rangle \end{pmatrix} \right|. \tag{7.1}$$

Доказательство. Обозначим через

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

$(m \times k)$-матрицу, в которой векторы записаны как строки, а через

$$\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$$

— $(k \times m)$-матрицу, где векторы записаны как столбцы. Напомним, что $\mathbb{L}$ — m-мерное подпространство. Рассмотрим ортогональное преобразование $O \in SO(k)$ такое, что $O(\mathbb{L}) = \mathbb{R}^m \oplus \{0\}^{k-m}$. Тогда $O(\xi_j) \in \mathbb{R}^m \oplus \{0\}^{k-m}$ для всех $j = 1, \ldots, m$ и поэтому

$$O \cdot \Xi^* = \begin{pmatrix} & \xi^* & \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где ξ^* — $(m \times m)$-матрица. Кроме того,

$$(O \cdot \Xi^*)^* = \Xi \cdot O^* = \begin{pmatrix} & 0 & \vdots & 0 \\ \xi & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как оба набора векторов лежат в одном подпространстве, то

$$O \cdot \Theta = \begin{pmatrix} & \theta & \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где θ — $(m \times m)$-матрица, а

$$\Theta^* \cdot O^* = \begin{pmatrix} & 0 & \vdots & 0 \\ \theta^* & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$V_\xi = \sqrt{\det(\Xi \cdot \Xi^*)} = \sqrt{\det(\xi \cdot \xi^*)} = |\det(\xi)|$$

и аналогично

$$V_\theta = \sqrt{\det(\Theta^* \cdot \Theta)} = \sqrt{\det(\theta^* \cdot \theta)} = |\det(\theta)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_\xi \cdot V_\theta = \sqrt{\det(\xi^* \cdot \xi)} \cdot \sqrt{\det(\theta \cdot \theta^*)} \\ = |\det(\xi)| \cdot |\det(\theta)| = |\det(\xi \cdot \theta)| \\ = |\det(\Xi \cdot O^* \cdot O \cdot \Theta)| = |\det(\Xi \cdot \Theta)| = (7.1). \end{aligned}$$

7.2. Следствие. *Объемы параллелепипедов, натянутых на векторы базиса и кобазиса некоторого m-мерного подпространства $\mathbb{R}^k$, $m \le k$, обратно пропорциональны.*

Доказательство. Действительно, пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и $\theta_1, \ldots, \theta_m$ — соответственно базис и кобазис m-мерного подпространства $\mathbb{L}$, т. е., $\langle \xi_i, \theta_j \rangle = \delta_{ij}$. Тогда

$$V_\xi \cdot V_\theta = \left| \det \begin{pmatrix} \langle \xi_1, \theta_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_1, \theta_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \xi_m, \theta_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_m, \theta_m \rangle \end{pmatrix} \right| = \det(E) = 1. \tag{7.2}$$

7.3. Формула коплощади (m-мерный случай). *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, $m \le k$, — функция класса C^1. Пусть еще $f : U \to \mathbb{E}$ — измеримая функция. Тогда если $f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x) d\varphi^*(x))}$ интегрируема, то справедлива формула*

$$\int\limits_U f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x) d\varphi^*(x))}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)} f(u)\, d\mathcal{H}^{k-m}(u). \tag{7.3}$$

7.4. Замечание. *В случае, когда $\varphi(x) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ — проекция на m-мерную плоскость $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$, то мы получаем теорему Фубини ($\varphi^{-1}(s)$ — $(k-m)$-мерная плоскость, а $\mathcal{H}^{k-m}$ — $(k-m)$-мерная мера Лебега на ней).*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

7.5. Лемма. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, $m \le k$, — отображение класса C^1. Пусть еще $f : U \to \mathbb{E}$ — измеримая функция, и отображение $g : U \to \mathbb{R}^k$, заданное как*

$$(x_1, \ldots,\ x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \ldots, x_{k-m}, \varphi(x)),$$

является диффеоморфизмом на некотором открытом множестве $V \subset U$. Тогда если $f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}$ интегрируема, то справедлива формула

$$\int\limits_V f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap V} f(u)\,d\mathcal{H}^{k-m}(u). \quad (7.4)$$

Доказательство. Отображение g имеет следующую структуру:

$$\varphi^{-1}(s) \ni x = (x_1, \ldots,\ x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \ldots,\ x_{k-m}, s).$$

Обозначим через $W = g(V)$ образ V при отображении g, а символом $\mathbb{R}^{k-m}_s = \{y \in \mathbb{R}^k : y = (z, s),\ z \in \mathbb{R}^{k-m}\}$ — сечение $\{y_{k-m+l} = s_l,\ l = 1, \ldots, m\}$. Рассмотрим действие g^{-1} на множестве $W \cap \mathbb{R}^{k-m}_s$. Легко заметить, что

$$\varphi^{-1}(s) \cap V = g^{-1}(W \cap \mathbb{R}^{k-m}_s) = \{x \in V : \varphi(x) = s\}. \quad (7.5)$$

По формуле замены переменной и теореме Фубини получаем

$$\int\limits_V f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx =$$

$$\int\limits_W f(g^{-1}(y))\sqrt{\det(d\varphi(g^{-1}(y))d\varphi^*(g^{-1}(y)))}|J(y, g^{-1})|\,dy$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^m} W} ds \int\limits_{W\cap\mathbb{R}^{k-m}_s} f(g^{-1}(y))\sqrt{\det(d\varphi(g^{-1}(y))d\varphi^*(g^{-1}(y)))}|J(y, g^{-1})|\,dz, \quad (7.6)$$

где $y = (z, s)$, а $dz = dz_1 \ldots dz_{k-m}$.

Фиксируем $s \in \mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^m} W$ и рассмотрим векторы

$$h_i = dg^{-1}(y)(e_i),\ i = 1, \ldots, k-m,$$

лежащие в касательной плоскости к поверхности $\varphi^{-1}(s)$ в точке $g^{-1}(y)$ (см. (7.5)) (здесь e_i, $i = 1, \ldots, k$, — векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^k$). Множество нормалей к этой поверхности — множество векторов вида

$$\nabla\varphi_l(g^{-1}(y)), \quad l = 1, \ldots, m.$$

Так как они линейно независимы ($\mathrm{rang}(\,d\varphi(g^{-1}(y))) = m$), то они составляют базис нормального подпространства. Проекцию τ_j вектора

$dg^{-1}(y)(e_{k-m+j})$ на нормальное подпространство в точке $g^{-1}(y)$ можно представить как

$$\tau_j = \sum_{l=1}^{m} \Big\langle \nabla\varphi_l(g^{-1}(y)),\ dg^{-1}(y)(e_{k-m+j}) \Big\rangle \phi_l(g^{-1}(y))$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \tau_{lj}(g^{-1}(y))\phi_l(g^{-1}(y)), \quad (7.7)$$

где $\phi_l(g^{-1}(y))$ — векторы кобазиса в нормальном подпространстве (т. е.,

$$\Big\langle \nabla\varphi_i(g^{-1}(y)),\ \phi_j(g^{-1}(y)) \Big\rangle = \delta_{ij}).$$

Известно, что модуль якобиана $dg^{-1}(y)$ равен объему параллелепипеда, натянутого на векторы $dg^{-1}(y)(e_i)$, $i = 1, \ldots, k$). Поэтому имеем

$$|J(y, g^{-1})| = \sqrt{\det(dg^{-1*}(y)dg^{-1}(y))} = \mathcal{J}(y, g^{-1})\sqrt{\det(\tau\phi(\tau\phi)^*)},$$

(здесь «основание» — $(k - m)$-мерный параллелепипед, натянутый на векторы h_i, $i = 1, \ldots, k - m$, и имеющий $(k - m)$-мерную меру $\mathcal{J}(y, g^{-1})$, $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — его «высоты» (координаты — в кобазисе), а $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ — матрицы, в которых координаты векторов записаны как строки).

Подставим в (7.6) полученное равенство для модуля якобиана. Учитывая, что $g \circ g^{-1} = I$ — тождественное отображение, получаем $\varphi_j(g^{-1}(y)) = y_{k-m+j}$. Следовательно,

$$\delta_{jl} = \frac{\partial}{\partial y_{k-m+l}} \varphi_j(g^{-1}(y)) = \sum_{t=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_t}(g^{-1}(y)) \frac{\partial g_t^{-1}(y)}{\partial y_{k-m+l}}(y)$$
$$= \Big\langle \nabla\varphi_j(g^{-1}(y)),\ dg^{-1}(y)(e_{k-m+l}) \Big\rangle = \tau_{jl}. \quad (7.8)$$

Поэтому $\tau = E$ — единичная матрица и

$$M(y) = \sqrt{\det(d\varphi(g^{-1}(y))d\varphi^*(g^{-1}(y))}\sqrt{\det(\phi\phi^*)}$$

равно произведению объемов k-мерных параллелепипедов, натянутых соответственно на векторы $\nabla\varphi_i$ и ϕ_j, $i, j = 1, \ldots, m$, лежащие в m-мерном нормальном подпространстве $N_{g^{-1}(y)}\varphi^{-1}(s)$. Тогда по следствию 7.2 леммы 7.1 он равен 1.

Таким образом, по формуле замены переменной получаем

$$\int\limits_V f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^m} W} ds \int\limits_{W\cap\mathbb{R}^{k-m}_s} f(g^{-1}(y))\mathcal{J}(y,g^{-1})M(y)\,dz$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap V} f(u)\,d\mathcal{H}^{k-m}(u). \quad (7.9)$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7.3. Обозначим через

$$Z = \{x \in U : \det(d\varphi(x)d\varphi^*(x)) = 0\}.$$

Известно, что $x \in Z$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} d\varphi(x) < m$. Рассмотрим открытое множество $U_0 = U \setminus Z$. Для любого $x \in U_0$ существует $r_0(x)$ такое, что $\operatorname{rang} d\varphi(y) = m$ для всякого $y \in B(x, r_0(x))$.

Заметим, что, если $x \in U_0$, то $\operatorname{rang} d\varphi(x) = m$ и, следовательно, существует $i_1, \dots, i_m$ такие, что

$$\operatorname{rang} d\varphi(x) = \operatorname{rang}\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i_1}}(x), \dots, \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i_m}}(x)\right) = m.$$

(Здесь вектор $\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_j}}$ записывается как столбец.)

Поэтому

$$\operatorname{rang} d\varphi(y) = \operatorname{rang}\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i_1}}(y), \dots, \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i_m}}(y)\right) = m$$

для всех y из некоторого шара $B(x, r_1(x)) \subset U_0$, $r_1(x) \le r_0(x)$.

Рассмотрим отображение $g : B(x, r_1(x)) \to \mathbb{R}^k$, заданное следующим образом:

$$B(x, r_1(x)) \ni x = (x_1, \dots,\ x_k) \xrightarrow{g}$$
$$(x_1, \dots, x_{i_1-1}, \varphi_{i_1}(x), x_{i_1+1}, \dots, x_{i_m-1}, \varphi_{i_m}(x), x_{i_m+1}, \dots, x_m),$$

где на i_j-ом месте вместо x_{i_j} стоит координатная функция φ_{i_j} отображения $\varphi(x)$. Отображение g непрерывно дифференцируемо и якобиан $J(x, g)$ невырожден в точке x. Поэтому по теореме об обратной функции отображение g является диффеоморфизмом в некотором шаре $B(x, r(x))$, $r(x) \le r_1(x)$.

Шары $\{B(x,r) : x \in U_0,\, r \leq r_1(x)\}$ образуют покрытие Витали множества U_0. Выберем дизъюнктную систему $\{B_n = B(x_n, r_n)\}$ шаров такую, что $|U_0 \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n| = 0$. Для любого шара B_n верно

$$\int\limits_{B_n} f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap B_n} f(u)\,d\mathcal{H}^{k-m}(u). \quad (7.10)$$

Действительно, фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и допустим,

$$\operatorname{rang} d\varphi(y) = \operatorname{rang}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{k-m+1}}(y), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(y)\right) = m$$

для всех $y \in B_n$. По построению отображение g, заданное следующим образом:

$$B_n \ni x = (x_1, \ldots,\ x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \ldots, x_{k-m}, \varphi(x)),$$

где отображение $\varphi(x)$ составлено из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, является диффеоморфизмом на B_n. Тогда равенство (7.10) следует из леммы 7.5.

Просуммируем равенство (7.10) по всем B_n. Получим (напомним, что мера множества $E = U_0 \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ равна 0)

$$\int\limits_{U} f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx = \int\limits_{U_0} f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx$$

$$= \int\limits_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n} f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx + \int\limits_{E} f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap B_n} f(u)\,d\mathcal{H}^{k-m}(u)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\setminus E} f(u)\,d\mathcal{H}^{k-m}(u)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)} f(u)\,d\mathcal{H}^{k-m}(u).$$

Последний переход возможен при условии, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap E} d\mathcal{H}^{k-m}(u) = 0.$$

Докажем это равенство. Его достаточно доказать при условии, что множество E содержится в компактной части множества U_0.

Фиксируем $\varepsilon > 0$, и рассмотрим открытое ограниченное множество $V \supset E$ такое, что $\overline{V} \subset U_0$ и $|V| < \varepsilon$. Заметим, что, если $x \in V$, то $0 < \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} < M$ для некоторой постоянной M, не зависящей от x, и, следовательно, существуют $i_1, \ldots, i_m$ такое, что

$$\operatorname{rang} d\varphi(x) = \operatorname{rang}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_1}}(x), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_m}}(x)\right) = m.$$

Поэтому

$$\operatorname{rang} d\varphi(y) = \operatorname{rang}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_1}}(y), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_m}}(y)\right) = m$$

для всех y из некоторого шара $B(x, 4r(x))$ такого, что $4r(x) \leq r_0(x)$ и $B(x, 4r(x)) \subset V$.

Шары $\{B(x,r) : x \in V, r \leq r(x)\}$ образуют покрытие Витали открытого множества V. Выберем по теореме Витали дизъюнктную систему $\{B_n = B(x_n, r_n)\}$ шаров такую, что $|V \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n| = 0$. Заметим, что по следствию теоремы Витали имеем также $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} 4B_n \supset V$, где $4B_n = B(x_n, 4r_n)$. По вышедоказанному верно равенство

$$\int\limits_{4B_n} \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap 4B_n} d\mathcal{H}^{k-m}(u).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap E} d\mathcal{H}^{k-m}(u) &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap V} d\mathcal{H}^{k-m}(u) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap 4B_n} d\mathcal{H}^{k-m}(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{4B_n} \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}\,dx \\ &\leq M \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{4B_n} dx = 4^k M \sum_{n\in\mathbb{N}} |B_n| = 4^k M|V| \leq 4^k M\varepsilon.\end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} ds \int\limits_{\varphi^{-1}(s)\cap E} d\mathcal{H}^{k-m}(u) = 0.$$

Формула коплощади доказана.