ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

3-й семестр

1. Множества и их характеристические функции

1.1. Определение. Множество A содержится в B, или A является подмножеством множества B, если любой элемент множества A является также и элементом множества B.

Пусть $\mathbb{X}$ — некоторое множество.

1.2. Задача. Отношение $\subset$ рефлексивно и транзитивно на подмножествах множества $\mathbb{X}$; оно симметрично в том и только том случае, когда $\mathbb{X}$ — пустое множество.

1.3. Задача. Пусть $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ — класс всех подмножеств пространства $\mathbb{X}$; к $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ принадлежат, конечно, пустое множество $\emptyset$ и всё $\mathbb{X}$. Пусть x — точка пространства $\mathbb{X}$, E — подмножество из $\mathbb{X}$, т. е., элемент класса $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — какой-нибудь класс подмножеств из $\mathbb{X}$, т. е., подкласс класса $\boldsymbol{\mathcal{X}}$. Тогда, если вместо u и v подставлять произвольно и независимо символы x, E, $\mathbb{X}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, то в числе пятидесяти соотношений вида

$$u \in v$$

и

$$u \subset v$$

будут соотношения всегда верные, могущие быть верными или неверными, всегда неверные и, наконец, лишенные смысла. Например, $u \in v$ имеет смысл тогда, когда слева стоит x, а справа — E или $\mathbb{X}$, или же слева — E или $\mathbb{X}$, а справа — $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ или $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

1.4. Задача. Образует ли класс всех подмножеств $\mathbb{X}$ группу относительно операции $\cup$ или $\cap$?

1.5. Определение. *Индикатором* (или *характеристической функцией*) подмножества $A \subset \mathbb{X}$ называется функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Между теоретико-множественными операциями над множествами и арифметическими операциями над их индикаторами существует определенная связь, отмеченная в следующих соотношениях.

1.6. $\chi_\emptyset \equiv 0$, $\chi_\mathbb{X} \equiv 1$.

1.7. *$A \subset B$ тогда и только тогда, когда $\chi_A(x) \le \chi_B(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$.*

1.8. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$.

1.9. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$.

1.10. $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$.

1.11. *Если $A \subset \mathbb{X}$, а $B \subset \mathbb{Y}$, то $\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$.*

1.12. $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$, *где $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность множеств A и B.*

Используя свойства 1.6 — 1.12, решите следующие задачи.
Обозначим символом $\setminus E$ дополнение к множеству E, равное $\mathbb{X} \setminus E$.

1.13. Задача. Доказать, что

$$\chi_{\setminus E} = 1 - \chi_E,\ \chi_{E\setminus F} = \chi_E \cdot (1 - \chi_F),$$

$$\chi_{E\Delta F} = |\chi_E - \chi_F| \equiv \chi_E + \chi_F (\mathrm{mod}\, 2).$$

объединен

1.14. Задача. Образование объединений множеств переместительно и сочетательно, т. е.,

$$E \cup F = F \cup E$$

и

$$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G;$$

образование пересечений обладает теми же свойствами.

1.15. Задача. Операции образования объединений и пересечений распределительны одна относительно другой, т. е.,

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

и

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$$

Распределительные законы действуют и в более общей форме:

$$F \cap \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E \cap F,$$

$$F \cup \bigcap_{E \in \mathcal{E}} E = \bigcap_{E \in \mathcal{E}} E \cup F.$$

1.16. Задача. Доказать равенства:

$$\begin{aligned}
(E \cup F) \setminus F = E \setminus F &= E \setminus (E \cap F),\\
E \cap (F \setminus G) &= (E \cap F) \setminus (E \cap G),\\
(E \setminus G) \cup (F \setminus G) &= (E \cup F) \setminus G,\\
(E \cap F) \setminus G &= (E \setminus G) \cap (F \setminus G),\\
(E \setminus F) \cup (E \cap G) &= E \setminus (F \setminus G),\\
(E \setminus F) \setminus G &= E \setminus (F \cup G),\\
(E \cap G) \setminus (F \cup H) &= (E \setminus F) \cap (G \setminus H).
\end{aligned}$$

1.17. Задача. Доказать равенства:

$$\begin{aligned}
E \cap (F \Delta G) = (E \cap F) \Delta (E \cap G), &\quad E \Delta \emptyset = E,\\
E \Delta F = F \Delta E, &\quad E \Delta (F \Delta G) = (E \Delta F) \Delta G,\\
E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F), &\quad E \Delta E = \emptyset,\\
E \Delta \mathbb{X} = \setminus E, &\quad E \Delta (\setminus E) = \mathbb{X}.
\end{aligned}$$

1.18. Задача. Образует ли класс всех подмножеств пространства $\mathbb{X}$ группу относительно операции Δ?

1.19. Задача. Распространяются ли приведенные в свойствах 1.8 и 1.9 выражения характеристических функций объединения и пересечения на любые конечные, счетные и произвольные объединения и пересечения?

1.20. Задача. Доводом в пользу равенства

$$\bigcap_{\gamma\in\emptyset} E_\gamma = \mathbb{X}$$

служит стремление распространить на пустое Γ соотношение

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = \setminus\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \setminus E_\gamma\Big),$$

справедливое при любом непустом множестве индексов Γ.

1.21. Определение. Если $\{E_n\}$ — последовательность множеств, то множество E^* всех тех точек x, каждая из которых принадлежит бесконечно многим E_n, называется *верхним пределом* последовательности и обозначается

$$E^* = \overline{\lim_n} E_n.$$

Множество E_* всех точек x, каждая из которых принадлежит всем E_n за исключением конечного числа, называется *нижним пределом* последовательности и обозначается

$$E_* = \underline{\lim_n} E_n.$$

Если $\{E_n\}$ такова, что ее верхний предел равен нижнему, то $E^*(= E_*)$ называют *пределом* этой последовательности и обозначают

$$\lim_n E_n.$$

Если при $n = 1,\ 2, \ldots$

$$E_n \subset E_{n+1},$$

то последовательность называется *возрастающей*; если при $n = 1,\ 2, \ldots$

$$E_n \supset E_{n+1},$$

то последовательность называется *убывающей*. Возрастающие и убывающие последовательности носят общее название *монотонных* последовательностей.

1.22. Задача. Показать, что последовательность множеств $\{E_n\}$ возрастает (убывает) тогда и только тогда, когда возрастает (убывает) последовательность функций $\{\chi_{E_n}\}$.

1.23. Задача. Если $E_* = \varliminf\limits_n E_n$ и $E^* = \varlimsup\limits_n E_n$, то

$$E_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = E^*.$$

Доказать, что $\chi_{E_*} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \chi_{E_n}$, $\chi_{E^*} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \chi_{E_n}$.

1.24. Задача. Верхний и нижний пределы последовательности множеств и предел такой последовательности (если он существует) не изменяются, если произвольным образом изменить конечное число членов последовательности.

1.25. Задача. Найти $\varliminf\limits_n E_n$ и $\varlimsup\limits_n E_n$, если $E_n = A$ при четных n и $E_n = B$ при нечетных n.

1.26. Задача. Найти $\lim\limits_n E_n$, если $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств.

1.27. Задача. Пусть $E_* = \varliminf\limits_n E_n$ и $E^* = \varlimsup\limits_n E_n$.

Найти $\varlimsup\limits_n(\backslash E_n)$, $\varliminf\limits_n(\backslash E_n)$, $\varlimsup\limits_n(F \setminus E_n)$ и $\varliminf\limits_n(F \setminus E_n)$.

1.28. Задача. (E. Bishop) Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств. Положим

$$D_1 = E_1, D_2 = D_1 \Delta E_2, D_3 = D_2 \Delta E_3, \ldots, D_{n+1} = D_n \Delta E_{n+1}, \ldots.$$

Последовательность $\{D_n\}$ имеет предел тогда и только тогда, когда $\lim\limits_n E_n = \emptyset$. Если (см. задачу 1.13) временно назвать операцию Δ «сложением», то этот результат словесно можно высказать так: ряд множеств сходится тогда и только тогда, когда его общий член стремится к нулю.

Напомним, что некоторая система подмножеств $A \subset \mathbb{X}$ называется *дизъюнктной*, если два произвольных различных множества этой системы взаимно не пересекаются.

1.29. Задача. Система подмножеств $A \subset \mathbb{X}$ дизъюнктна тогда и только тогда, когда $\chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2} = 0$ для любых различных множеств A_1 и A_2 данной системы.

2. Дробящиеся системы

2.1. Определение. Система $\mathcal{S}$ подмножеств множества $\mathbb{X}$ называется *дробящейся*, если для всякой конечной подсистемы $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ имеется такая конечная дизъюнктная подсистема $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$, что каждое подмножество $P \in \mathcal{A}$ является объединением некоторой конечной подсистемы $\mathcal{B}_P \subset \mathcal{B}$ и

$$\bigcup_{P \in \mathcal{A}} P = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Используя результат задачи 4.3, можно проверить, что система $\mathcal{S}$ подмножеств из $\mathbb{X}$ является дробящейся тогда и только тогда, когда для всякой конечной совокупности множеств $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ существует такая конечная подсистема $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\} \subset \mathcal{S}$, что $\chi_{B_i} \cdot \chi_{B_j} = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$; $\chi_{A_l} = \sum\limits_{i, B_i \cap A_l \neq \emptyset} \chi_{B_i}$ для любого $l = 1, \dots, m$ и $\chi_{\mathcal{A}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{B_i}$

2.2. Пример. (*Одномерным*) *сегментом* (*промежутком*) в $\mathbb{R}$ называется множество точек x вещественной оси, удовлетворяющих одному из приведенных условий:

$$1)\ a \leq x \leq b; \quad 2)\ a < x \leq b; \quad 3)\ a \leq x < b; \quad 4)\ a < x < b.$$

Не исключается случай $a = b$, в частности, пустое множество — также сегмент. Совокупность одномерных сегментов обозначается символом $\mathcal{S}^1$.

Очевидно, что пересечение двух одномерных сегментов есть одномерный сегмент.

2.3. Свойство. *Совокупность $\mathcal{S}^1$ одномерных сегментов образует дробящуюся систему.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ состоит из двух сегментов P_1 и P_2. Если $P_1 \subset P_2$, то в качестве дизъюнктной системы $\mathcal{B}$ можно взять P_1 и два непересекающихся сегмента, составляющих дополнение $P_2 \setminus P_1$. В противном случае в качестве $\mathcal{B}$ можно взять $P_2 \cap P_1$, $P_2 \setminus P_1$ и $P_1 \setminus P_2$.

Далее рассуждаем по индукции. Пусть для системы $\mathcal{A}$, состоящей их m сегментов, утверждение доказано. Рассмотрим произвольную систему множеств, состоящую из сегментов $P_1, \ldots, P_m, P_{m+1}$. Для системы $\{P_1, \ldots, P_m\}$ существует конечная дизъюнктная система $\mathcal{B}$ сегментов такая, что каждый сегмент P_i, $i = 1, \ldots, m$, является объединением некоторой подсистемы $\mathcal{B}_{P_i} \subset \mathcal{B}$. Тогда в качестве дизъюнктной системы для $P_1, \ldots, P_m$, P_{m+1} можно взять пересечения $P \cap P_{m+1}$, $P \in \mathcal{B}$, и непересекающиеся сегменты, составляющие дополнения $P_{m+1} \setminus \bigcup\limits_{P \in \mathcal{B}} P$ и $P \setminus P_{m+1}$, $P \in \mathcal{B}$.

2.4. Пример. Определение. (*k-мерным*) *сегментом* в $\mathbb{R}^k$ называется декартово произведение k одномерных сегментов (при $k = 2$ мы получаем прямоугольники, а при $k = 3$ — прямоугольные параллелепипеды). Совокупность k-мерных сегментов обозначается символом $\mathcal{S}^k$.

Очевидно, что пересечение двух k-мерных сегментов есть k-мерный сегмент.

2.5. Свойство. *Совокупность $\mathcal{S}^k$ k-мерных сегментов образует дробящуюся систему.*

Доказательство. Доказательство индукцией по размерности. Продемонстрируем идею индукционного перехода в случае $k = 2$. Рассмотрим конечную подсистему $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}^2$ 2-мерных сегментов. Каждое множество $A \in \mathcal{A}$ представимо в виде декартова произведения двух одномерных сегментов $T_{A,1}$ и $T_{A,2}$. Так как совокупность одномерных сегментов является дробящейся, то для конечного набора одномерных сегментов $\{T_{A,i} \mid A \in \mathcal{A}\}$, $i = 1, 2$, существует такая конечная дизъюнктная система одномерных сегментов $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{S}^1$, что каждое подмножество $T_{A,i}$ является объединением некоторой конечной подсистемы $\mathcal{B}_{A,i} \subset \mathcal{B}_i$. Система $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, 2\}$ множеств является дизъюнктной и для любого множества $A = T_{A,1} \times T_{A,2}$ выполняется соотношение

$$A = \bigcup \{B_1 \times B_2 \mid B_i \cap T_{A,i} \neq \emptyset,\ B_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, 2\}.$$

2.6. Определение. Объединение конечного числа k-мерных сегментов называется *элементарным множеством* в $\mathbb{R}^k$.

Из определения дробящейся системы и свойства 2.5 вытекает, в частности,

2.7. Свойство. *Каждое элементарное множество из* $\mathbb{R}^k$ *представимо в виде объединения конечного числа непересекающихся сегментов.*

Общий случай свойства 2.5 доказывается с помощью следующего свойства.

2.8. Свойство. *Пусть* $\mathcal{S}_{\mathbb{X}}$ *— дробящаяся система на* $\mathbb{X}$, *а* $\mathcal{S}_{\mathbb{Y}}$ *— дробящаяся система на* $\mathbb{Y}$. *Пусть* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *— декартово произведение множеств* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$. *Тогда система множеств* $\mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{S}_{\mathbb{X}},\ B \in \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}\}$ *является дробящейся на* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Доказательство. Рассмотрим конечную подсистему $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}$. Каждое множество $A \in \mathcal{A}$ представимо в виде декартова произведения двух множеств: $T_{A,1} \in \mathcal{S}_{\mathbb{X}}$ и $T_{A,2} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}$. Так как совокупности $\mathcal{S}_{\mathbb{X}}$ и $\mathcal{S}_{\mathbb{Y}}$ дробящиеся, то для конечного набора $\{T_{A,i} \mid A \in \mathcal{A}\}$, $i = 1, 2$, существуют такие конечные дизъюнктные системы множеств $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{S}_{\mathbb{X}}$ и $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}$, что каждое подмножество $T_{A,i}$ является объединением некоторой конечной подсистемы $\mathcal{B}_{A,i} \subset \mathcal{B}_i$. Система $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, 2\}$ множеств является дизъюнктной, для любого множества $A = T_{A,1} \times T_{A,2}$ выполняется соотношение

$$A = \bigcup \{B_1 \times B_2 \mid B_i \cap T_{A,i} \neq \emptyset,\ B_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, 2\}$$

и

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

3. Полукольца

3.1. Определение. *Полукольцом* называется непустой класс $\mathcal{P}$ множеств, такой, что

а) если $E \in \mathcal{P}$ и $F \in \mathcal{P}$, то $E \cap F \in \mathcal{P}$;

б) если $E \in \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{P}$ и $E \subset F$, то существует конечный класс: $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ множеств, принадлежащих $\mathcal{P}$, со следующим свойством: $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$, причем $D_i = C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{P}, i = 1, \ldots, n$.

3.2. Задача. Всякое полукольцо является дробящейся системой; обратное неверно (приведите пример).

Указание. Рассмотреть систему подмножеств $\mathbb{R}$, состоящую из всевозможных полуоткрытых и одноточечных промежутков и интервалов.

3.3. Задача. Всякое полукольцо содержит пустое множество. Если $\mathbb{X}$ — произвольное множество, то класс $\mathcal{P}$, состоящий из пустого множества и всех одноточечных подмножеств $\mathbb{X}$ (т. е., множеств вида $\{x\}$, где $x \in \mathbb{X}$), есть полукольцо. Если $\mathbb{X}$ — действительная прямая, то класс всех ограниченных промежутков, замкнутых слева и открытых справа, является полукольцом.

3.4. Задача. Пусть $\mathcal{P}$ — какое-нибудь полукольцо, а $\mathcal{R}$ — класс всех множеств вида $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, где $\{E_1, \ldots, E_n\}$ — произвольный конечный класс непересекающихся множеств из $\mathcal{P}$:

а) $\mathcal{R}$ замкнуто относительно образования, во-первых, конечных пересечений и, во-вторых, объединений непересекающихся множеств;

б) Если $E \in \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{P}$ и $E \subset F$, то $F \setminus E \in \mathcal{R}$;

в) Если $E \in \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{R}$ и $E \subset F$, то $F \setminus E \in \mathcal{R}$;

г) Если $E \in \mathcal{R}$, $F \in \mathcal{R}$ и $E \subset F$, то $F \setminus E \in \mathcal{R}$;

д) $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{P})$.

3.5. Определение. Непустой класс $\mathcal{M}$ множеств называется *монотонным*, если, какова бы ни была содержащаяся в нем монотонная последовательность множеств $\{E_n\}$,

$$\lim_n E_n \in \mathcal{M}.$$

3.6. Определение. Наименьший монотонный класс множеств, содержащий $\mathcal{E}$, называется монотонным классом, *порожденным* произвольным классом $\mathcal{E}$, и обозначается символом $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

3.7. Задача. Верно ли, что, если $\mathcal{P}$ — полукольцо, то $\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \mathcal{S}(\mathcal{P})$, где $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ — наименьший класс множеств, содержащий $\mathcal{P}$, обладающий следующими свойствами:

а) Если $E \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$ и $F \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$, то $E \cup F \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$ и $E \setminus F \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$;

б) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$ для любых множеств $E_n \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$ $(n \in \mathbb{N})$.

3.8. Задача. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо и $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{P})$, то $\mathcal{S}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{P})$, где $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ — наименьший класс множеств, содержащий $\mathcal{P}$, обладающий следующим свойством: если $E \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ и $F \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, то $E \cup F \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ и $E \setminus F \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, а $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ определяется, как в задаче 3.7.

3.9. Определение. Класс $\mathcal{L}$ множеств называется *структурой* (lattice), если $\emptyset \in \mathcal{L}$ и $E \cup F \in \mathcal{L}, E \cap F \in \mathcal{L}$, коль скоро $E \in \mathcal{L}, F \in \mathcal{L}$.

3.10. Задача. Пусть $\mathcal{L}$ — структура, а $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{L})$ — класс всех множеств вида $F \setminus E$, где $E \in \mathcal{L}, F \in \mathcal{L}$ и $E \subset F$. Тогда $\mathcal{P}$ представляет собой полукольцо.

Указание. Если $D_i = F_i \setminus E_i$, $i = 1, 2$, — представления двух множеств из $\mathcal{P}$ в виде собственных разностей множеств из $\mathcal{L}$ — и если $D_1 \supset D_2$, то $F_2 \setminus E_2 \subset C \subset F_1 \setminus E_1$, где $C = (F_1 \cap F_2) \setminus (E_1 \cap F_2)$ или $C = F_1 \setminus [E_1 \cup (F_1 \cap E_2)]$.

3.11. Определение. Класс $\mathcal{N}$ называется *нормальным*, если он замкнут относительно образования пересечений убывающих последовательностей и счетных соединений непересекающихся множеств, в него входящих.

3.12. Задача. Наименьший нормальный класс, содержащий класс $\mathcal{E}$, обозначим $\mathcal{N}(\mathcal{E})$; тогда, если $\mathcal{P}$ — любое полукольцо, то $\mathcal{N}(\mathcal{P}) = \mathcal{S}(\mathcal{P})$.

4. Кольца, σ-кольца, алгебры и σ-алгебры множеств

4.1. Определение. Совокупность $\mathcal{R}$ подмножеств из $\mathbb{X}$ называется *кольцом*, если

$$A \in \mathcal{R} \text{ и } B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{R} \text{ и } A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Ввиду равенства $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ верно также, что $A \cap B \in \mathcal{R}$, если только $A, B \in \mathcal{R}$.

4.2. Свойство. *Совокупность элементарных множеств (см. определение 2.6) в $\mathbb{R}^k$ образует кольцо.*

Доказательство. Очевидно, что объединение двух элементарных множеств — элементарное множество.

Пусть A_1 и A_2 — два элементарных множества. Представим элементарное множество $A_1 \cup A_2$ в виде объединения элементов конечной дизъюнктной системы $\mathcal{B}$ одномерных сегментов так, чтобы каждый сегмент P, составляющий либо A_1, либо A_2 являлся объединением некоторой конечной подсистемы $\mathcal{B}_P \subset \mathcal{B}$, и $\{\bigcup B : B \subset \mathcal{B}\} = A_1 \cup A_2$. Если из совокупности $\mathcal{B}$ выбросить все сегменты, пересекающиеся с множеством A_2, то объединение оставшихся сегментов будет элементарным множеством, совпадающим с дополнением $A_1 \setminus A_2$.

4.3. Задача. Показать, что кольцо $\mathcal{R}$ является и дробящейся системой, и полукольцом.

4.4. Задача. Пусть совокупность $\mathcal{S}$ подмножеств множества $\mathbb{X}$ образует дробящуюся систему. Доказать, что совокупность $\mathcal{R}(\mathcal{S})$, состоящая из объединений конечного числа элементов из $\mathcal{S}$, образует кольцо. В частности, любой элемент из $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ представим в виде конечного объединения непересекающихся элементов из $\mathcal{S}$.

4.5. Задача. Будет ли класс $\mathcal{P}$ из задачи 3.10 кольцом?

4.6. Задача. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо множеств. Если обозначить

$$E \odot F = E \cap F,\ E \oplus F = E \Delta F,$$

то относительно таких операций «сложения» ($\oplus$) и «умножения» ($\odot$) множество $\mathcal{R}$ оказывается «кольцом» в алгебраическом смысле этого слова. Алгебраические кольца, такие как это, в которых все элементы идемпотентны (т. е., $E \odot E = E$ для любого E из $\mathcal{R}$), также называются булевскими кольцами. Именно тесная связь между булевскими кольцами множеств и общими булевскими кольцами оправдывает употребление "кольцевой" терминологии в применении к классам множеств.

4.7. Задача. Пересечение любой системы колец представляет собой кольцо.

4.8. Определение. *Топологическим пространством* называется множество $\mathbb{X}$ с выделенным в нем классом подмножеств, называемых *открытыми множествами* в $\mathbb{X}$. Класс открытых множеств должен содержать пустое множество $\emptyset$ и все $\mathbb{X}$; кроме того, пересечение любого конечного числа и соединение произвольного (а не только конечного или счетного) класса открытых множеств должны быть открытыми множествами.

4.9. Задача. В каких топологических пространствах класс $\mathcal{E}$ всех его открытых множеств образует кольцо?

4.10. Определение. Наименьшее кольцо $\mathcal{R}_0$, содержащее класс $\mathcal{E}$, — называется кольцом, *порожденным* классом $\mathcal{E}$, и обозначается $\mathcal{R}(\mathcal{E})$.

4.11. Задача. В следующих классах указать кольцо, порожденное классом $\mathcal{E}$.

а) В $\mathbb{X}$ взято фиксированное подмножество $\mathbb{E}$, и $\mathcal{E} = \{E\}$ есть класс, состоящий из этого единственного множества.

б) В $\mathbb{X}$ фиксированно подмножество $\mathbb{E}$, и $\mathcal{E}$ есть класс всех подмножеств $\mathbb{X}$, содержащих $\mathbb{E}$, т. е., $\mathcal{E} = \{F : E \subset F\}$.

в) $\mathcal{E}$ есть класс всех множеств, содержащих ровно по две различные точки.

4.12. Определение. Кольцо $\mathcal{R}$ называется σ-кольцом, если

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$$

для любых множеств $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Поскольку

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n), \quad \text{то и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R},$$

если только $\mathcal{R}$ есть σ-кольцо.

4.13. Задача. Совокупность элементарных множеств в $\mathbb{R}^k$ не образует σ-кольцо.

4.14. Задача. Является ли σ-кольцом непустой класс множеств, замкнутый относительно образования симметрических разностей и счетных пересечений?

4.15. Определение. Наименьшее σ-кольцо, содержащее какой-либо класс $\mathcal{E}$, называется σ-кольцом, *порожденным* классом $\mathcal{E}$, и обозначается символом $\mathcal{S}_\sigma(\mathcal{E})$.

4.16. Задача. Если $\mathcal{E}$ — непустой класс множеств, то всякое множество из $\mathcal{S}_\sigma(\mathcal{E})$ может быть покрыто объединением счетного числа множеств из $\mathcal{E}$.

4.17. Задача. Если $\mathcal{E}$ — бесконечный класс множеств, то $\mathcal{E}$ и $\mathcal{S}_\sigma(\mathcal{E})$ имеют одинаковую мощность.

4.18. Задача. Для любого класса $\mathcal{E}$, содержащего $\emptyset$, полагаем $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, и для всякого порядкового числа $\alpha > 0$

$$\mathcal{E}_\alpha = \left(\bigcup\{\mathcal{E}_\beta : \beta < \alpha\}\right)^*,$$

где класс $\mathcal{C}^*$ образован из всевозможных счетных соединений разностей множеств из $\mathcal{C}$:

а) $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_\beta \subset \mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{S}_\sigma(\mathcal{E})$ при $0 < \beta < \alpha$;

б) $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \bigcup\{\mathcal{E}_\alpha : \alpha < \Omega\}$, где Ω — первое несчетное порядковое число;

в) если мощность $\mathcal{E}$ не выше континуума, то и мощность $\mathcal{S}_\sigma(\mathcal{E})$ не выше континуума.

4.19. Определение. Непустой класс $\mathcal{R}$ называется *алгеброй* (или *булевской алгеброй*) тогда, когда он обладает следующими свойствами:

а) если $E \in \mathcal{R}$ и $F \in \mathcal{R}$, то $E \cup F \in \mathcal{R}$;

б) если $E \in \mathcal{R}$, то $\backslash E \in \mathcal{R}$.

4.20. Задача. Пересечение любой системы алгебр представляет собой алгебру.

4.21. Задача. Если $\mathcal{R}$ — какое-нибудь кольцо множеств и $\mathcal{A}$ — класс тех множеств, которые либо сами принадлежат $\mathcal{R}$, либо обладают принадлежащими $\mathcal{R}$ дополнениями, то $\mathcal{A}$ представляет собой алгебру.

4.22. Задача. Прямо или посредством задачи 4.21 доказать, что, если $\mathcal{E}$ — произвольный класс множеств, то существует единственная алгебра $\mathcal{R}_0$, такая, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$, какова бы ни была алгебра $\mathcal{R}$, содержащая $\mathcal{E}$.

4.23. Задача. Следующие классы множеств служат примерами колец или алгебр:

а) $\mathbb{X}$ — n-мерное евклидово пространство; класс $\mathcal{E}$ образован всевозможными конечными соединениями "полуоткрытых промежутков" вида

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : -\infty < a_i \leq x_i < b_i < +\infty; i = 1, \ldots, n\}.$$

б) $\mathbb{X}$ — какое-нибудь несчетное множество; $\mathcal{E}$ — класс всех конечных или счетных подмножеств множества $\mathbb{X}$.

в) $\mathbb{X}$ — какое-нибудь несчетное множество; $\mathcal{E}$ — класс множеств, которые либо сами конечны или счетны, либо обладают конечным или счетным дополнением.

4.24. Определение. *σ-алгеброй* называется непустой класс множеств, замкнутый относительно образования дополнений и счетных объединений; тогда σ-алгебру можно описать как σ-кольцо, содержащее $\mathbb{X}$.

4.25. Задача. Если $\mathcal{R}$ — алгебра, то $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ (см. 3.6) совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей $\mathcal{R}$. Верно ли это тогда, когда $\mathcal{R}$ есть кольцо?

4.26. Задача. В следующих примерах указать σ-алгебру, σ-кольцо и монотонный класс, порожденные классом $\mathcal{E}$:

а) $\mathbb{X}$ — какое угодно множество, P — некоторая фиксированная перестановка точек из $\mathbb{X}$, т. е., некоторое фиксированное взаимно-однозначное отображение $\mathbb{X}$ само на себя. Подмножество $\mathbb{E}$ в $\mathbb{X}$ назовем *инвариантным* относительно P, если, коль скоро $x \in \mathbb{E}$, непременно $P(x) \in \mathbb{E}$ и $P^{-1}(x) \in \mathbb{E}$. В качестве $\mathcal{E}$ взят класс всех инвариантных множеств.

б) $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — два произвольных множества, T — какое-нибудь (не обязательно взаимно-однозначное) отображение $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$. Если $\mathbb{E} \subset \mathbb{Y}$, то $T^{-1}(\mathbb{E})$ означает множество всех x из $\mathbb{X}$, для которых $T(x) \in \mathbb{E}$. $\mathcal{E}$ — класс всех множеств вида $T^{-1}(\mathbb{E})$, где $\mathbb{E}$ —произвольное подмножество из $\mathbb{Y}$.

в) $\mathbb{X}$ — топологическое пространство, $\mathcal{E}$ — класс его подмножеств первой категории.

г) $\mathbb{X}$ — трехмерное евклидово пространство; назовем его подмножество $\mathbb{E}$ *цилиндром*, если из $(x, y, z) \in \mathbb{E}$ вытекает $(x, y, \hat{z}) \in \mathbb{E}$, где

$\hat{z}$ — произвольное действительное число. $\mathcal{E}$ — класс всевозможных цилиндров.

д) $\mathbb{X}$ — евклидова плоскость, $\mathcal{E}$ — класс подмножеств из $\mathbb{X}$, могущих быть покрытыми конечным или счетным числом горизонтальных прямых.

5. Мера Лебега

5.1. Определение. Если $I \in \mathcal{S}^1$ — сегмент с концевыми точками a и b, $a \le b$, то его *лебегова мера* равна $|I| = b - a$. Таким образом, лебегова мера одноточечного промежутка равна нулю.

5.2. Свойство.

$$\begin{cases} |\langle a, b\rangle| = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} |(a-\varepsilon, b+\varepsilon)|, \\ |\langle a, b\rangle| = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} |[a+\varepsilon, b-\varepsilon]|. \end{cases}$$

Из свойства 5.2 имеем

5.3. Свойство регулярности. *Для любого промежутка $A \in \mathcal{S}^1$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют замкнутый промежуток $F \in \mathcal{S}^1$ и открытый промежуток $G \in \mathcal{S}^1$ такие, что*

$$F \subset A \subset G \quad \text{и} \quad |G| - \varepsilon \le |A| \le |F| + \varepsilon.$$

Напомним, что множество $A \subset \mathbb{R}^k$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, и — *открытым*, если вместе с любой точкой $x \in A$ в этом множестве содержится некоторый куб $B(x, r)$, $r > 0$.

5.4. Определение. Если $J = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_k$ — k-мерный сегмент, то его (k-*мерная*) *мера Лебега* равна $|J| = |I_1| \cdot |I_2| \cdot \ldots \cdot |I_k|$.

5.5. Задача. Сформулировать и доказать свойства k-мерной меры множеств из $\mathcal{S}^k$, аналогичные свойствам 5.2 – 5.3.

5.6. Свойство. *Мера Лебега, определенная на дробящейся системе $\mathcal{S}^1$ ($\mathcal{S}^k$) множеств из $\mathbb{X}$, счетно-аддитивна, т. е., для любого*

$P \in \mathcal{S}^1$ ($P \in \mathcal{S}^k$) и любой дизъюнктной последовательности множеств $\{A_n \in \mathcal{S}\ (\mathcal{S}^k),\ n \in \mathbb{N}\}$ из условия $P = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ следует равенство

$$|P| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |A_n|.$$

Доказательство. Проведем доказательство в одномерном случае, его обобщение на многомерную ситуацию очевидно. Пусть $P \in \mathcal{S}^1$ — одномерный промежуток, а $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — такая дизъюнктная последовательность одномерных промежутков, что $P = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Добавляя, в случае необходимости, к последовательности $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ концевые точки промежутка P, можно считать, что P — замкнутый промежуток. Очевидно, что $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |A_n| \leq |P|$ (поскольку это неравенство справедливо для любой конечной суммы).

Для доказательства обратного неравенства фиксируем $\varepsilon > 0$ и, используя свойство 5.3, заменим каждый промежуток A_n большим открытым промежутком $B_n \supset A_n$ таким образом, чтобы $|B_n| \leq |A_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда совокупность открытых промежутков $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ образует открытое покрытие замкнутого промежутка P и $\sum\limits_n |B_n| \leq \sum\limits_n |A_n| + \varepsilon$. Извлекая из $\{B_n\}$ конечное подпокрытие $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_l}\}$ промежутка P, имеем следующие соотношения:

$$|P| \leq \sum_{j=1}^{l} |B_{i_j}| \leq \sum_n |B_n| \leq \sum_n |A_n| + \varepsilon. \tag{5.1}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то $|P| \leq \sum\limits_n |A_n|$. Таким образом, $|P| = \sum\limits_n |A_n|$, т. е., мера, определенная в п. 5.1, счетно-аддитивна.

5.7. Задача. Привести строгое доказательство неравенств (5.1). Указание. Показать, что всякому покрытию отрезка P интервалами $U_1, \ldots, U_l$ соответствует дизъюнктная система промежутков $P_1, \ldots, P_k$ такая, что $P = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ и каждый промежуток P_i содержится в некотором интервале U_{k_i}.

5.8. Задача. Показать, что мера Лебега *конечно-аддитивна*, т. е., свойство аддитивности выполняется для произвольного *конечного* дизъюнктного набора множеств $\{A_n \in \mathcal{S}\ (\mathcal{S}^k), n = 1, \ldots, l\}$.

Из определений 2.1 и 5.6 вытекает, что мера Лебега пустого множества равна нулю, и *свойство монотонности*: $|A| \leq |B|$, если $A \subset B$ (независимо от ее конечной или счетной аддитивности).

5.9. Задача. Обозначим символом $\mathcal{P}$ класс всех множеств вида

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) : a_i \leq x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Докажите следующую теорему:

Теорема.*Если* $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$ *— последовательность множеств из* $\mathcal{P}$, *такая, что*

$$E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

то

$$|E_0| \leq \sum_{i=1}^{n} |E_i|.$$

Указание. При доказательстве используйте теоремы:

1.*Если* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *— конечный класс непересекающихся множеств из* $\mathcal{P}$ *и* $E_i \subset E_0,\ i = 1, \ldots, n$, *где* E_0 *— некоторое множество, принадлежащее* $\mathcal{P}$, *то*

$$\sum_{i=1}^{n} |E_i| \leq |E_0|.$$

2.*Если* $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$ *— последовательность множеств из* $\mathcal{P}$, *такая, что*

$$E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

то

$$|E_0| \leq \sum_{i=1}^{n} |E_i|.$$

5.10. Задача. Докажите, используя задачу 5.9, что мера Лебега счетно-аддитивна на $\mathcal{P}$.

5.11. Задача. В доказательстве теоремы задачи 5.9 для одномерного случая пусть E_{n_1} — тот промежуток последовательности $\{E_i\}$, левый конец которого совпадает с левым концом промежутка E, E_{n_2}

— тот промежуток, левый конец которого совпадает с правым концом промежутка E_{n_1}, и т. д. Не пользуясь задачей 5.9, показать, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i} \in \mathcal{P}$$

и

$$|\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_{n_i}|.$$

5.12. Задача. Еще одно доказательство теоремы задачи 5.9, не опирающееся на эту задачу, можно получить, расположив промежутки последовательности $\{E_i\}$ в порядке возрастания их левых концов и затем применив трансфинитную индукцию.

5.13. Задача. Показать, что мера Лебега, определенная на дробящейся системе $\mathcal{S}$, распространяется на кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ по следующему правилу. Согласно задаче 4.4, любой элемент A из $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ представим в виде конечного объединения дизъюнктной системы множеств $B_i \in \mathcal{S}$. Полагаем $|A| = \sum\limits_i |B_i|$. Показать, что такое определение меры Лебега не зависит от представления A в виде объединения дизъюнктной системы множеств из $\mathcal{S}$. Показать, что распространение меры Лебега на кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ обладает свойствами счетной или конечной аддитивности.

5.14. Задача. Может ли равняться нулю мера множества в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку?

5.15. Задача. Можно ли построить на отрезке $[a,\ b]$ замкнутое множество меры $b-a$, отличное от всего отрезка?

5.16. Задача. Какова мера множества

а) точек отрезка $[0,\ 1]$, которые допускают разложение в десятичную дробь без использования цифры 7;

б) точек отрезка $[0,\ 1]$, десятичное разложение которых невозможно без цифры 7;

в) точек прямой, которые допускают разложение в десятичную дробь без использования цифры 7;

г) точек отрезка $[0,\ 1]$, которые допускают разложение в десятичную дробь без комбинации стоящих рядом цифр 2, 2, 2;

д) точек отрезка $[0,\ 1]$, в разложении которых в *бесконечную* десятичную дробь фигурируют все цифры от 1 до 9?

5.17. Задача. обозначим через $(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots,\ (a_n,\ b_n),\ \ldots$ смежные интервалы совершенного нигде не плотного множества E меры $0,6$, расположенного на сегменте $[0,\ 1]$. (причем $\inf\limits_{x\in E} x = 0$, $\sup\limits_{x\in E} x = 1$). Опишем около каждой точки a_i, как около центра, интервал U_i длины $\frac{(b_i-a_i)}{4}$; такие же интервалы V_i (длины $\frac{(b_i-a_i)}{4}$) опишем около каждой точки b_i. покроет ли множество $\Big(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} V_i\Big)$ все множество E? Что можно сказать о мере множества $\Big(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} V_i\Big)$?

5.18. Определение. *Множеством с мерой Лебега* называется упорядоченная тройка $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, |\cdot|)$, где $\mathbb{X}$ — множество, $\mathcal{S}$ — дробящаяся система, а $|\cdot| : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — мера Лебега.

6. Мера (общий случай)

6.1. Определение. Функция, областью определения которой служит какой-либо класс множеств, называется *функцией множества.*

6.2. Определение. Действительная функция множества μ, заданная на $\mathcal{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, называется:

аддитивной, если для любых множеств E и F из $\mathcal{E}$, таких, что $E \cup F \in \mathcal{E}$ и $E \cap F = \emptyset$, выполняется неравенство

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F);$$

конечно-аддитивной, если для любого конечного класса $\{E_1, \ldots, E_n\}$ непересекающихся множеств из $\mathcal{E}$, объединение которых также принадлежит $\mathcal{E}$, выполняется равенство

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i);$$

счетно-аддитивной, если для любой последовательности $\{E_n\}$ непересекающихся множеств из $\mathcal{E}$, объединение которых также принадлежит $\mathcal{E}$, выполняется равенство

$$\mu\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

6.3. Задача. Если μ — заданная на некотором кольце $\mathcal{R}$ неотрицательная аддитивная действительная функция множества, принимающая конечные или бесконечные значения, причем $\mu(E) < \infty$ хотя бы для одного E из $\mathcal{R}$, то $\mu(\emptyset) = 0$.

6.4. Задача. Сформулировать аналог определения свойства регулярности для неубывающей функции множества μ.

6.5. Задача. Доказать, что любая регулярная функция множества, определенная на $\mathcal{S}^k$, счетно-аддитивна.

6.6. Задача. Заданная на кольце $\mathcal{R}$ неотрицательная аддитивная функция множества μ, принимающая конечные или бесконечные значения и равная нулю на пустом множестве, конечно-аддитивна. То же верно и тогда, когда μ задана на полукольце $\mathcal{P}$, но доказательство в этом случае нетривиально. Его можно провести следующим образом. Назовем *разбиением* множества E из $\mathcal{P}$ конечный класс $\{E_1, \ldots, E_n\}$ непересекающихся множеств E_i, принадлежащих $\mathcal{P}$, объединение которых равно E. Разбиение $\{E_i\}$ назовем *μ-разбиением*, если, каково бы ни было F из $\mathcal{P}$,

$$\mu(E \cap F) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F).$$

Разбиение $\{E_i\}$ множества E назовем *подразбиением* разбиения $\{F_j\}$ (того же множества E), если каждое E_i содержится в некотором F_j. Далее доказываем последовательно:

а) Если $\{E_i\}$ и $\{F_j\}$ — разбиения E, то их *произведение*, т. е., класс множеств вида $E_i \cap F_j$, также является разбиением.

б) Если некоторое подразбиение разбиения $\{E_i\}$ есть μ-разбиение, то и само $\{E_i\}$ является μ-разбиением.

в) Произведение двух μ-разбиений представляет собой μ-разбиение.

г) Если $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n$, где $C_i \in \mathcal{P},\ i = 1, \ldots, n$, и

$$D_i = C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{P},\ i = 1, \ldots, n,$$

то $\{E, D_1, \ldots, D_n\}$ есть μ-разбиение множества F.

д) Всякое разбиение множества E из $\mathcal{P}$ есть μ-разбиение.

6.7. Определение. Действительная функция множества μ, принимающая конечные или бесконечные значения, называется *мерой*, если она определена на некоторой дробящейся системе $\mathcal{S}$, неотрицательна, счетно-аддитивна и $\mu(\emptyset) = 0$.

6.8. Задача. Пусть $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая неотрицательная функция, определенная на вещественной оси. Положим

$$\begin{aligned}
\mu([a, b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a-), \\
\mu([a, b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a-), \\
\mu((a, b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a+), \\
\mu((a, b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a+).
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha(x+)$ $(\alpha(x-))$ — предел справа (слева) функции α в точке x. Доказать, что μ — мера, регулярная на $\mathcal{S}^1$ в смысле свойства 5.3.

6.9. Задача. Пусть $s(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — *скачкообразная* функция, т. е., функция, однозначно определяющаяся не более чем счетным набором $S = \{x_i,\ \alpha_i\}$, таким, что $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots,\ \alpha_i > 0$ для всех i, равная $s(x) = \sum\limits_{i,\ x_i \le x} \alpha_i$.

Определим $\mu : \mathcal{S}^1 \to \mathbb{R}$ как в задаче 6.8, взяв $\alpha(x) = s(x)$.

а) Доказать, что μ — мера, регулярная на $\mathcal{S}^1$ в смысле свойства 5.3
.

б) Определить, чему будет равна $\mu(\langle a,\ b\rangle)$ для произвольного сегмента $\langle a,\ b\rangle \subset \mathbb{R}$. (Рассмотреть случаи, когда $S = \{x_0,\ \alpha_0\}$, $S = \{x_0, \alpha_0, \ldots, x_k, \alpha_k\}$ и общий.)

в) Решить аналогичную задачу для функций $s_1(x) = \sum\limits_{i,\ x_i < x} \alpha_i$ и

$$s_2(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i,\ x_i < x} \alpha_i,\ x \ne x_j, \\ \sum\limits_{i,\ x_i < x} \alpha_i + \alpha_j \cdot m,\ m \in (0,\ 1),\ x = x_j. \end{cases}$$

6.10. Определение. *Множеством с мерой* называется упорядоченная тройка $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$, где $\mathbb{X}$ — множество, $\mathcal{S}$ — дробящаяся система, а $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — мера.

6.11. Определение. Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ и $(\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}, \nu)$ — два множества с мерой. Их *произведением* называется тройка $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}, \lambda)$, где $\lambda : \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ определяется равенством $\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

6.12. Задача. Доказать, что λ — мера на $\mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}$.

При построении интеграла Лебега любая мера, определенная и регулярная на множестве $\mathcal{S}^1$ $(\mathcal{S}^k)$, продолжается до счетно-аддитивной меры, определенной на σ-кольце, содержащем $\mathcal{S}^1$ $(\mathcal{S}^k)$.

6.13. Задача. Показать, что мера μ, определенная на дробящейся системе $\mathcal{S}$, распространяется на кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ по следующему правилу. Согласно задаче 4.4, любой элемент A из $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ представим в виде конечного объединения дизъюнктной системы множеств $B_i \in \mathcal{S}$. Полагаем $\mu(A) = \sum\limits_i \mu(B_i)$. Показать, что такое определение меры μ не зависит от представления A в виде объединения дизъюнктной системы множеств из $\mathcal{S}$.

6.14. Задача. Если $\mathcal{E}$ — непустой класс множеств и μ — мера на $\mathcal{R}(\mathcal{E})$, такая, что $\mu(E) < \infty$ для всех E из $\mathcal{E}$, то μ конечна на $\mathcal{R}(\mathcal{E})$.

6.15. Задача. Если μ — мера на каком-нибудь кольце $\mathcal{R}$, а E и F — множества из $\mathcal{R}$, то

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

Если E, F, и G — множества из $\mathcal{R}$, то

$$\mu(E) + \mu(F) + \mu(G) + \mu(E \cap F \cap G) =$$

$$\mu(E \cup F \cup G) + \mu(E \cap F) + \mu(F \cap G) + \mu(G \cap E).$$

Эти соотношения можно обобщить на любое конечное число множеств.

6.16. Задача. Если μ — мера на кольце $\mathcal{R}$, то для двух множеств E и F из $\mathcal{R}$ мы пишем $E \sim F$, если $\mu(E \Delta F) = 0$. Отношение "$\sim$" рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если $E \sim F$, то $\mu(E) = \mu(F) = \mu(E \cap F)$. Будет ли кольцом класс тех множеств E из $\mathcal{R}$, для которых $E \sim \emptyset$?

6.17. Задача. Положим $\rho(E,F) = \mu(E\Delta F)$. Тогда $\rho(E,F) \geq 0$, $\rho(E,F) = \rho(F,E)$ и $\rho(E,F) = \rho(E,G) + \rho(G,F)$. Если $E_1 \sim E_2$ и $F_1 \sim F_2$, то $\rho(E_1,F_1) = \rho(E_2,F_2)$.

6.18. Задача. Для колец верны теоремы:

Теорема 1. *Если μ — мера на кольце $\mathcal{R}$, $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность множеств из $\mathcal{R}$ и $\lim\limits_n E_n \in \mathcal{R}$, то $\mu(\lim\limits_n E_n) = \lim\limits_n \mu(E_n)$.*

Теорема 2. *Если μ — мера на кольце $\mathcal{R}$, $\{E_n\}$ — убывающая последовательность множеств из $\mathcal{R}$, из которых хотя бы одно имеет конечную меру, и $\lim\limits_n E_n \in \mathcal{R}$, то $\mu(\lim\limits_n E_n) = \lim\limits_n \mu(E_n)$.*

Они могут быть обобщены следующим образом. Пусть μ — мера на кольце $\mathcal{R}$. Если $\{E_n\}$ — последовательность множеств из $\mathcal{R}$, причем $\bigcap\limits_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathcal{R}$, $n = 1,2,\ldots$, и $\underline{\lim}_n E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathcal{R}$, то $\mu(\underline{\lim}_n E_n) \leq \underline{\lim}_n \mu(E_n)$.

В том случае, когда $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathcal{R}$, $n = 1,2,\ldots$, $\overline{\lim}_n E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathcal{R}$ и $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_i) < \infty$ хотя бы при одном значении n, имеем $\mu(\overline{\lim}_n E_n) \geq \overline{\lim}_n \mu(E_n)$.

6.19. Задача. Если выполняются предположения второй части задачи 6.18 и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, то $\mu(\lim\sup\limits_n E_n) = 0$.

6.20. Задача. Верна ли теорема 2 из задачи 6.18, если в ее формулировке опустить условие, что $\mu(E_n) < \infty$ при некотором n?

6.21. Определение. Будем говорить, что действительная функция μ, заданная на некотором классе $\mathcal{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, *непрерывна снизу* на множестве E (в классе $\mathcal{E}$), если для любой возрастающей последовательности множеств $\{E_n\}$ из $\mathcal{E}$, такой, что $\lim\limits_n E_n = E$, выполняется равенство $\lim\limits_n \mu(E_n) = \mu(E)$. Подобным же образом μ *непрерывна сверху* на E, если, какова бы ни была убывающая последовательность множеств $\{E_n\}$ из $\mathcal{E}$, такая, что $\lim\limits_n E_n = E$ и $|\mu(E_m)| < \infty$ хотя бы для одного значения m, выполняется равенство $\lim\limits_n \mu(E_n) = \mu(E)$.

6.22. Задача. Пусть $\mathbb{X}$ — множество всех целых положительных чисел, а $\mathcal{R}$ — класс всех конечных подмножеств из $\mathbb{X}$ и их дополнений. Для множеств E, входящих в $\mathcal{R}$, мы полагаем $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = \infty$, в зависимости от того, конечно E или бесконечно. Такая функция множества μ непрерывна сверху на пустом множестве, но свойством счетной аддитивности не обладает.

6.23. Задача. Пусть μ — мера, заданная на борелевских множествах некоторого сепарабельного полного метрического пространства $\mathbb{X}$, причем $\mu(\mathbb{X}) = 1$. Тогда $\mathbb{X}$ содержит множество E, представляющее собой соединение счетного числа компактных множеств и такое, что $\mu(E) = 1$.

Указание. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек, плотная в $\mathbb{X}$, а U_n^k — замкнутая сфера радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в x_n. Если $0 < \varepsilon < 1$ и $F_m^k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n^k$, то m_k определим по индукции как наименьшее целое положительное число, для которого

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{k} F_{m_i}^i\Big) > 1 - \varepsilon.$$

Тогда множество $C = \bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{m_i}^i$ компактно и $\mu(C) \geq 1 - \varepsilon$.

6.24. Определение. Пусть на кольце $\mathcal{R}$ определена мера μ; множество E называется множеством σ-конечной меры, если в $\mathcal{R}$ существует последовательность множеств $\{E_n\}$, такая, что

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

и

$$\mu(E_n) < \infty, \; n = 1, 2, \ldots$$

Если мера любого множества E из $\mathcal{R}$ конечна (σ-конечна), то сама мера μ называется *конечной* (σ-*конечной*) на $\mathcal{R}$. Если $\mathbb{X} \in \mathcal{R}$, т. е., $\mathcal{R}$ представляет собой алгебру, и при этом мера самого $\mathbb{X}$ конечна или σ-конечна, то μ называется *вполне конечной* или соответственно *вполне* σ-*конечной* мерой.

6.25. Задача. Пусть μ — мера на некотором σ-кольце; тогда класс всех множеств конечной меры представляет собой кольцо, а класс всех множеств σ-конечной меры — σ-кольцо. Если, кроме того, мера μ σ-конечна, то для того, чтобы класс всех множеств конечной меры представлял собой σ-кольцо, необходимо и достаточно, чтобы мера μ была конечной. Верно ли последнее утверждение в том случае, когда мера μ не σ-конечна?

6.26. Задача. Пусть μ —мера на некотором σ-кольце $\mathcal{C}$ и E — множество σ-конечной меры из $\mathcal{C}$. Если $\mathcal{D}$ — произвольный класс, состоящий из непересекающихся множеств и содержащийся в $\mathcal{C}$, то неравенство $\mu(E \cap D) \neq 0$ выполняется лишь для конечного или счетного числа множеств D из $\mathcal{D}$.

Указание. Предположить сначала, что $\mu(E) < \infty$; для целых положительных n рассмотреть классы $\left\{D : D \in \mathcal{D}, \mu(E \cap D) \geq \frac{1}{n}\right\}$.

6.27. Задача. Показать, что если μ (вполне) конечна или σ-конечна на полукольце $\mathcal{P}$, то таково же и ее распространение на кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ (см. задачу 3.4).

7. Пространство ступенчатых функций и элементарный интеграл

Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное множество и $\mathcal{S}$ — некоторая дробящаяся система подмножеств из $\mathbb{X}$. Пусть $\mathbb{E}$ — произвольное банахово пространство.

7.1. Определение. Функция $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ называется *ступенчатой* (*относительно дробящейся системы* $\mathcal{S}$), если существует конечная дизъюнктная совокупность множеств $P_i \in \mathcal{S}$ такая, что на каждом из этих множеств функция принимает некоторое значение $c_i \in \mathbb{E}$, $i = 1, \ldots, l$, отличное от нуля, и $\varphi(x) = 0$ вне $\bigcup\limits_{i=1}^{l} P_i$. Всякую ступенчатую функцию удобно записывать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i \chi_{P_i}(x).$$

7.2. Свойство. *Если φ_1 и φ_2 — различные ступенчатые функции, то существует конечная дизъюнктная система множеств такая,* *что каждая из функций φ_i, $i = 1, 2$, является линейной комбинацией характеристических функций этой дизъюнктной системы.*

Указание. Использовать в доказательстве свойства 7.2 свойства дробящейся системы $\mathcal{S}$.

7.3. Задача. Доказать, что определение 7.1 ступенчатой функции эквивалентно следующему: *функция $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ называется ступенчатой относительно дробящейся системы $\mathcal{S}$, если существует конечная дизъюнктная совокупность множеств $P_i \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ такая, что на каждом из этих множеств функция принимает некоторое значение $c_i \in \mathbb{E}$, $i = 1, \ldots, l$, отличное от нуля.*

Совокупность ступенчатых функций, определенных на $\mathbb{X}$ со значениями в $\mathbb{E}$, обозначим символом $\mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$.

7.4. Задача. Со стандартными операциями поточечного сложения и умножения функций на вещественное число $\mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ является векторным пространством.

Указание. Применить свойство 7.2.

7.5. Задача. Совокупность ступенчатых функций $\mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ является подпространством пространства всех функций, определенных на $\mathbb{X}$ со значениями в $\mathbb{E}$.

7.6. Задача. Если $f \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$, то $|f| \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$.

7.7. Задача. Если $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$, то $\min(\varphi, \psi)$ и $\max(\varphi, \psi)$ принадлежат $\mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$.

Указание. Применить свойство 7.2.

7.8. Определение. Пусть $\varphi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$. *Элементарным интегралом* функции $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} c_i \chi_{P_i}(x)$ называется величина

$$\sum_{i=1}^{l} c_i \mu(P_i),$$

обозначаемая одним из следующих символов

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \varphi\, d\mu, \quad \int \varphi, \quad \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi(x)\, dx, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$

(последние два символа употребляются, как правило, для мер пп. 5.1 и 5.4).

7.9. Задача. Показать, в соответствии со свойством 7.3, что в определении 7.8 множества P_i могут принадлежать кольцу $\mathcal{R}(\mathcal{S})$, а мера μ — это распространение меры с дробящейся системы на кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ (задача 6.13).

Свойства элементарного интеграла

7.10. Свойство 1. *Элементарный интеграл ступенчатой функции определен корректно, т. е., не зависит от выбора представления ступенчатой функции в виде* $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} c_i \chi_{P_i}(x)$.

Доказательство. Рассмотрим другое представление функции φ: $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} d_j \chi_{Q_j}(x)$. Тогда в соответствии с задачей 7.9 множества P_i и Q_j можно считать элементами кольца $\mathcal{R}(\mathcal{S})$. Отсюда

$$Q_j = \bigcup_{i, Q_j \cap P_i \neq \emptyset} Q_j \cap P_i \quad \text{и поэтому} \quad \mu(Q_j) = \sum_{i, Q_j \cap P_i \neq \emptyset} \mu(Q_j \cap P_i).$$

Аналогично имеем $\mu(P_i) = \sum\limits_{j, P_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu(P_i \cap Q_j)$. Отсюда

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i \chi_{P_i}(x) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} c_i \chi_{P_i \cap Q_j}(x) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \chi_{P_i \cap Q_j}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij} \chi_{Q_j \cap P_i}(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} d_j \chi_{Q_j \cap P_i}(x) = \sum_{j=1}^{k} d_j \chi_{Q_j}(x).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{l} c_i \mu(P_i) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \mu(P_i \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{k} d_j \mu(Q_j).$$

В качестве упражнения предлагается доказать следующие два свойства операции интегрирования.

7.11. Свойство 2. (Линейность). *Если* $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{X}} (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \alpha \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi\, d\mu + \beta \int\limits_{\mathbb{X}} \psi\, d\mu$$

для любых двух чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7.12. Свойство 3. (Ограниченность). *Если* $\varphi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$, *то*

$$\left|\int\limits_{\mathbb{X}} \varphi\, d\mu\right| \leq \int\limits_{\mathbb{X}} |\varphi|\, d\mu.$$

Здесь символ $|\cdot|$ *обозначает норму в пространстве* $\mathbb{E}$.

Говорят, что функции $\varphi,\ \psi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ связаны отношением порядка $\varphi \leq \psi$, если $\varphi(x) \leq \psi(x)$ для всех точек $x \in \mathbb{X}$.

7.13. Задача. Если $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ и $\varphi \leq \psi$, то

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \varphi\, d\mu \leq \int\limits_{\mathbb{X}} \psi\, d\mu.$$

7.14. Свойство 4. (Принцип исчерпывания). *Если* $\psi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ *и* $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq \varphi_n \leq \ldots$ *— такая неубывающая последовательность функций класса* $\mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$, *что* $\psi(x) \leq \sup\{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *для любой точки* $x \in \mathbb{X}$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \psi\, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n\, d\mu.$$

Доказательство. Заметим, что множество

$$D = \{x \in \mathbb{X} : \varphi_1(x) \neq 0\} \cup \{x \in \mathbb{X} : \psi(x) \neq 0\}$$

принадлежит $\mathcal{R}(\mathcal{S})$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Далее, если $x \notin D$, то $\varphi_n(x) \geq \psi(x)$, $n \in \mathbb{N}$, и поэтому множества $A_n = \{x \in \mathbb{X} : \varphi_n(x) < \psi(x) - \varepsilon\chi_D(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, лежат в D, принадлежат кольцу $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ и монотонно убывают: $A_n \supset A_{n+1}$, причем $\bigcap\limits_n A_n = \emptyset$ (если, напротив, точка $x \in \bigcap\limits_n A_n$, то $\sup\limits_n \varphi_n(x) \leq \psi(x) - \varepsilon < \psi(x)$, что противоречит условию). Заметим, что $A_1 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A_{n+1}$. Действительно, включение $A_1 \supset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A_{n+1}$ очевидно. Если $x \in A_1$, то существует n_0 такое, что $x \in A_{n_0}$ и $x \notin A_{n_0+1}$. Таким образом, $x \in A_{n_0} \setminus A_{n_0+1}$ и, следовательно, $A_1 \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A_{n+1}$. Далее,

$$\mu(A_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A_{n+1}) < \infty.$$

по задаче 6.13. Отсюда вытекает, что

$$\mu(A_n) = \sum_{k\geq n} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Заметим, что

$$\chi_{\mathbb{X}\setminus A_n}\varphi_n, \chi_{A_n}\varphi_n \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$$

. Поэтому

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n \, d\mu &= \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{\mathbb{X}\setminus A_n}\varphi_n \, d\mu + \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{A_n}\varphi_n \, d\mu \\ &\geq \int\limits_{\mathbb{X}} (\psi - \varepsilon\chi_D) \, d\mu - \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{A_n}(\psi - \varepsilon\chi_D) \, d\mu + \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{A_n}\varphi_n \, d\mu. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Оценим два последних интеграла

$$\begin{aligned} 0 \leq \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{A_n}(\psi - \varepsilon\chi_D) \, d\mu - \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{A_n}\varphi_n \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{A_n}((\psi - \varepsilon\chi_D) - \varphi_n) \, d\mu \\ \leq \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{A_n}((\psi - \varepsilon\chi_D) - \varphi_1) \, d\mu \leq \mu(A_n) \max_{x\in D} |\psi(x) - \varphi_1(x)|. \end{aligned}$$

Переходя в (7.1) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n \, d\mu \geq \int\limits_{\mathbb{X}} \psi \, d\mu - \int\limits_{\mathbb{X}} \varepsilon\chi_D \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} \psi \, d\mu - \varepsilon\mu(D).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то принцип исчерпывания доказан.

7.15. Задача. Доказать, что принцип исчерпывания эквивалентен следующей элементарной теореме Беппо Леви: *если* $\psi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ *и*

$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq \varphi_n \leq \ldots$ — *такая неубывающая последовательность функций класса* $\mathrm{Step}(\mathbb{X};\mathbb{R})$, *что* $\psi(x) = \sup\{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *для любой точки* $x \in \mathbb{X}$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \psi \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n \, d\mu.$$

Получить отсюда, что принцип исчерпывания эквивалентен счетной аддитивности меры μ.

7.16. Элементарная теорема Фубини. *Если* $\varphi(x, y)$ — *ступенчатая функция на* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$, *то*

1) *для всех* $x \in \mathbb{R}^k$ *функция* $\varphi(x, y)$ *переменной* y *является ступенчатой функцией на* $\mathbb{R}^l$;

2) *функция* $J(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^l} \varphi(x, y)\, dy$ *является ступенчатой функцией на* $\mathbb{R}^k$;

3) $\int\limits_{\mathbb{R}^k} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^l} \varphi(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{k+l}} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$

Сформулированная теорема может быть обобщена на произведение множеств с мерой (см. пример 6.11).

7.17. Элементарная теорема Фубини на произведении множеств с мерой. *Пусть* $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ *и* $(\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}, \nu)$ — *два множества с мерой,* $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}, \lambda)$ — *их произведение. Если* $\varphi(x, y)$ — *ступенчатая функция на* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$, *то*

1) *для всех* $x \in \mathbb{X}$ *функция* $\varphi(x, y)$ *переменной* y *является ступенчатой функцией на* $\mathbb{Y}$;

2) *функция* $J(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi(x, y)\, d\nu(y)$ *является ступенчатой функцией на* $\mathbb{X}$;

3) $\int\limits_{\mathbb{X}} \left(\int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \varphi(x, y)\, d\lambda.$

Доказательство. Рассмотрим любую функцию $\varphi(x, y) \in \mathrm{Step}\, S(\mathbb{X}\times \mathbb{Y})$. В соответствии с определением она может быть представлена в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} \chi_{A_i\times B_j}(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_j}(y),$$

где сумма производится лишь по конечному набору индексов i и j, а $A_i \subset \mathcal{S}_{\mathbb{X}}$, $B_j \subset \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}$. Если мы фиксируем $x = x_0$, то

$$\varphi(x_0, y) = \sum_j \Big(\sum_i c_{ij}\chi_{A_i}(x_0)\Big)\chi_{B_j}(y),$$

откуда видно, что $\varphi(x_0, y)$ как функция y является ступенчатой на $\mathbb{Y}$. Далее

$$J(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi(x,y)\,d\nu(y) = \sum_j \Big(\sum_i c_{ij}\chi_{A_i}(x)\Big)\nu(B_j)$$
$$= \sum_i \Big(\sum_j c_{ij}\nu(B_j)\Big)\chi_{A_i}(x),$$

откуда видно, что $J(x)$ является ступенчатой функцией на $\mathbb{X}$. Окончательно,

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \Big(\int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{X}} J(x)\,d\mu(x) =$$
$$\sum_i \Big(\sum_j c_{ij}\nu(B_j)\Big)\mu(A_i) = \sum_i\sum_j c_{ij}\mu(A_i)\nu(B_j) =$$
$$\sum_i\sum_j c_{ij}\lambda(A_i \times B_j) = \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \varphi(x,y)\,d\lambda.$$

7.18. Замечание. Доказательство, приведенное выше, не использует счетную аддитивность мер μ, ν и λ, поэтому элементарная теорема Фубини справедлива в предположении, что меры μ, ν и λ лишь конечно аддитивны.

Из элементарной теоремы Фубини мы получим следующее

7.19. Свойство. *Пусть принцип исчерпывания справедлив на множествах с мерой* $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ *и* $(\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}, \nu)$. *Тогда принцип исчерпывания справедлив также и на множестве с мерой* $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}, \lambda)$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y};\mathbb{R})$ и $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \ldots \le \varphi_n \le \ldots$ — такая неубывающая последовательность функций класса $\mathrm{Step}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y};\mathbb{R})$, что $\psi(x,y) \le \sup\{\varphi_n(x,y) : n \in \mathbb{N}\}$ для любой точки $(x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$. Фиксируем $x \in \mathbb{X}$. Применим принцип исчерпывания к функции $\psi(x,y)$ и последовательности $\varphi_n(x,y)$ по переменной

y. Получаем

$$\int\limits_{\mathbb{Y}} \psi(x,y)\,d\nu(y) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\,d\nu(y).$$

Отсюда вытекает, что ступенчатая функция $\int\limits_{\mathbb{Y}} \psi(x,y)\,d\nu(y)$ и монотонная последовательность ступенчатых функций $\int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\,d\nu(y)$ удовлетворяют условиям принципа исчерпывания по переменной x. Таким образом, применяя к последнему принцип исчерпывания на $\mathbb{X}$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \psi(x,y)\,d\lambda = \int\limits_{\mathbb{X}} \Big(\int\limits_{\mathbb{Y}} \psi(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x)$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}} \Big(\int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\,d\lambda.$$

Из доказанного свойства и задачи 7.15 получаем следующее

7.20. Свойство. *Если μ и ν — счетно-аддитивные меры на множествах с мерой $(\mathbb{X},\mathcal{S}_{\mathbb{X}},\mu)$ и $(\mathbb{Y},\mathcal{S}_{\mathbb{Y}},\nu)$, то и мера λ также счетно-аддитивна.*

Установленное свойство дает новое решение задачи 3.12.

8. Интегральная норма

8.1. Определение. Фиксируем произвольное множество с мерой $(\mathbb{X},\mathcal{S},\mu)$. Рассмотрим произвольную функцию $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ (или $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$). Число $s \in [0,\infty]$ называется *интегральной оценкой* для функции f, если существует возрастающая последовательность неотрицательных ступенчатых функций $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \ldots \le \varphi_n \le \ldots$ такая, что

1) $|f(x)| \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$,
2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n\,d\mu(x) \le s$.

8.2. Определение. *Интегральной нормой* $\|f\|$ функции f называется нижняя грань всех ее интегральных оценок. Если для функции

$f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ не существует монотонных последовательностей ступенчатых функций, удовлетворяющих условию 1, или все ее интегральные оценки равны ∞, то полагаем $\|f\| = \infty$.

8.3. Задача. Пусть $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$. Тогда

$$\|f\| = \inf \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n(x)\, d\mu(x),$$

где нижняя грань берется по всем возрастающим последовательностям неотрицательных ступенчатых функций $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \ldots \le \varphi_n \le \ldots$ таких, что $|f(x)| \le \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

8.4. Задача. Функции f и $|f|$ имеют одинаковые интегральные нормы.

8.5. Задача. Доказать, используя определение интегральной нормы, что интегральная норма характеристической функции ограниченного промежутка $\langle a, b\rangle$ равна мере $\mu(\langle a, b\rangle)$ этого промежутка. Чему равна интегральная норма характеристической функции неограниченного промежутка?

Из определения вытекает, что любая функция, определенная на вещественной прямой, имеет интегральную норму (конечную или бесконечную). Множество всех функций, определенных на $\mathbb{X}$, принимающих значение в $\mathbb{E}$ и имеющих конечную норму, обозначим символом $\mathcal{F}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$.

8.6. Определение. Число $\|f - g\|$ называется *интегральным отклонением* функции f от g.

Интегральная норма иногда называется также *верхним интегралом* и обозначается символом $\int^* f$.

Свойства интегральной нормы

8.7. $\|f\| \ge 0$; $\|f\| = 0$, *если* $f \equiv 0$, *обратное неверно.*

8.8. *Если* $|f(x)| \le |g(x)|$ *для всех* $x \in \mathbb{X}$, *то* $\|f\| \le \|g\|$.

8.9. $\|cf\| = |c|\|f\|$ *для любой постоянной* $c \in \mathbb{R}$.

8.10. $\big\|\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n\big\| \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|$.

8.11. *Если* $\varphi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X};\mathbb{E})$, *то* $\|\varphi\| = \int\limits_{\mathbb{X}} |\varphi|\, d\mu(x)$ *и* $\big|\int\limits_{\mathbb{X}} \varphi\, d\mu(x)\big| \le \|\varphi\|$.

8.12. Задача. Доказать, используя свойства интегральной нормы, что интегральная норма характеристической функции ограниченного промежутка $\langle a, b\rangle$ равна мере $\mu(\langle a, b\rangle)$ этого промежутка.

Доказательство свойства 8.10. Предположим, что правая часть неравенства конечна (иначе доказывать нечего). Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для функции f_n существует возрастающая последовательность неотрицательных ступенчатых функций $\varphi_{n,1} \le \varphi_{n,2} \le \ldots \le \varphi_{n,m} \le \ldots$ такая, что $|f_n(x)| \le \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \varphi_{n,m}(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$ и

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{n,m}(x)\, d\mu(x) < \|f_n\| + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Рассмотрим последовательность $\psi_n = \varphi_{1,n} + \varphi_{2,n} + \ldots + \varphi_{n,n}$. Очевидно, что $\psi_n \in \mathrm{Step}(\mathbb{X};\mathbb{R})$. Эта последовательность обладает следующими свойствами:

1) $\psi_1 \le \psi_2 \le \ldots \le \psi_m \ldots$;

2) $\Big|\sum\limits_{k=1}^{m} f_k\Big| \le \sum\limits_{k=1}^{m} |f_k| \le \sum\limits_{k=1}^{m} \sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \varphi_{k,l} = \sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_{k,l} \le \sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \psi_l$, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_{k,l} \le \psi_l$ для любого $l > m$. Отсюда выводим

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big| \le \sup_{l\in\mathbb{N}} \psi_l.$$

Далее, имеем неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \psi_l(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_{k,l}(x)\, d\mu(x) < \sum_{k=1}^{l} \Big(\|f_k\| + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| + \varepsilon.$$

Отсюда получаем $\sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}} \psi_l(x)\, d\mu(x) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\| + \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ является интегральной оценкой для функции $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Свойство 8.10 доказано.

8.13. Задача. Чем свойства интегральной нормы в пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{X};\mathbb{E})$ отличаются от свойств нормы в нормированном пространстве?

9. Пренебрежимые функции и пренебрежимые множества

В связи со свойством 8.7 интегральной нормы возникает естественный вопрос: что представляют собой функции, интегральная норма которых равна нулю?

Сделаем следующее наблюдение. Если, например, функция $g : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ имеет равную нулю интегральную норму: $\|g\| = 0$, то, с одной стороны, в силу свойства 8.10 для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{X};\mathbb{E})$ имеем $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\| = \|f\|$. С другой стороны, в силу того же свойства $\|f\| \leq \|f+g\|+\|g\| = \|f+g\|$. Следовательно, $\|f\| = \|f+g\|$. Вывод: при нахождении интегральной нормы можно пренебречь слагаемыми, интегральная норма которых равна нулю. Это свойство мотивирует следующее

9.1. Определение. Функция $g : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ называется *пренебрежимой* (относительно множества с мерой $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$), если $\|g\| = 0$.

9.2. Определение. Множество $A \subset \mathbb{X}$ называется *пренебрежимым* или *множеством нулевой меры* (относительно множества с мерой $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$), если его индикатор есть пренебрежимая функция, то есть, $\|\chi_A\| = 0$.

Свойства пренебрежимых функций и пренебрежимых множеств

9.3. *Функция f пренебрежима тогда и только тогда, когда $|f|$ — пренебрежимая функция.*

9.4. *Сумма ряда пренебрежимых функций есть пренебрежимая функция.*

9.5. *Подмножество пренебрежимого множества пренебрежимо.*

9.6. *Объединение счетной совокупности пренебрежимых множеств есть пренебрежимое множество.*

9.7. *Пусть* μ — *мера Лебега в* $\mathbb{R}^k$. *Одноточечное множество пренебрежимо. Счетная совокупность точек — пренебрежимое множество.*

Доказательство сформулированных свойств предоставляется читателю.

10. Термин «почти всюду»

10.1. Определение. Пусть $P(x)$ — высказывание, зависящее от точки $x \in \mathbb{X}$. Говорят, что свойство $P(x)$ верно *для почти всех* $x \in \mathbb{X}$ или (*почти всюду*) (на множестве с мерой $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$), если существует пренебрежимое множество $Z \subset \mathbb{X}$ такое, что свойство $P(x)$ верно для всех $x \in \mathbb{X} \setminus Z$.

10.2. Лемма. *Пусть* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$ — *произвольное положительное число. Тогда для индикатора множества* $A_\lambda = \{x : |f(x)| \geq \lambda\}$ *справедлива оценка*

$$\|\chi_{A_\lambda}\| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|.$$

Доказательство. Очевидно $\chi_{A_\lambda}(x) \leq \frac{|f(x)|}{\lambda}$. Применяя свойства 8.8 и 8.9 интегральной нормы, получаем $\|\chi_{A_\lambda}\| \leq \lambda^{-1}\|f\|$.

10.3. Лемма. *Если* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{X}; \overline{\mathbb{R}})$, *то функция* f *почти всюду конечна: множество* $\{x : |f(x)| = \infty\}$ *пренебрежимо или* $|f(x)| < \infty$ *для почти всех* x.

Доказательство. Пусть $A = \{x : |f(x)| = \infty\}$. Очевидно $A \subset A_n = \{x : |f(x)| \geq n\}$. Поэтому $\chi_A(x) \leq \chi_{A_n}(x) \leq \frac{|f(x)|}{n}$. Отсюда по лемме 10.2 $\|\chi_A\| \leq n^{-1}\|f\|$. Так как n — произвольное число, то A — пренебрежимое множество.

10.4. Лемма. *Функция* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ *пренебрежима тогда и только тогда, когда* f *равна нулю почти всюду.*

Доказательство. Пусть f — пренебрежимая функция. Имеем $A = \{x : |f(x)| > 0\} = \bigcup\limits_n A_n$, где $A_n = \{x : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. По лемме 10.2 $\|\chi_{A_n}\| \leq n\|f\| = 0$. Так как $\chi_A \leq \sum\limits_n \chi_{A_n}$, то индикатор множества A — пренебрежимая функция и, следовательно, необходимость доказана.

Пусть теперь f равна нулю почти всюду. Обозначим символом A множество точек, в которых функция f не равна нулю. По условию $\|\chi_A\| = 0$. Если норма функции f ограничена постоянной M, то в силу поточечного неравенства $|f(x)| \le M\chi_A(x)$ интегральная норма функции f равна нулю. Если функция f не ограничена, то представим ее в виде суммы ряда ограниченных функций:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \text{ где } f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } n \le |f(x)| < n+1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В силу свойства 8.10 интегральной нормы $\|f\| = 0$.

11. Пространство интегрируемых функций. Интеграл Лебега

11.1. Определение. Фиксируем множество с мерой $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$. Функция f называется *интегрируемой* (*по Лебегу*), если существует такая последовательность $\varphi_n \in \operatorname{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$, что $\|f - \varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. В силу оценки

$$\left| \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n \, d\mu - \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_m \, d\mu \right| \le \int\limits_{\mathbb{X}} |\varphi_n - \varphi_m| \, d\mu = \|\varphi_n - \varphi_m\|$$

последовательность интегралов $\int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n \, d\mu$ фундаментальна. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n \, d\mu,$$

который называется *интегралом Лебега* функции f и обозначается символом $\int\limits_{\mathbb{X}} f \, d\mu$.

Для корректности приведенного понятия требуется проверить следующие свойства.

1. *Значение* $\int\limits_{\mathbb{X}} f \, d\mu$ *не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности* φ_n *ступенчатых функций.*

2. *Для функций класса* $\operatorname{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ *«новый» интеграл совпадает с элементарным интегралом.*

Доказательство сформулированных свойств предоставляется читателю.

Совокупность интегрируемых функций обозначается символом $\mathcal{L}_1(\mathbb{X};\mathbb{E})$.

Будем говорить, что функция f интегрируема на множестве $U \subset \mathbb{X}$, если функция $f\chi_U$ интегрируема на $\mathbb{X}$. В этом случае $\int\limits_{\mathbb{X}} f \cdot \chi_U \, d\mu$ называется интегралом функции f по множеству U и обозначается символом $\int\limits_U f(x)\, d\mu$.

Свойства интеграла

11.2. Линейность. *Если* $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$, *где* $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X};\mathbb{E})$ — *конечная совокупность интегрируемых функций, а* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — *конечная совокупность постоянных, то функция* f *интегрируема и*

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int\limits_{\mathbb{X}} f_k \, d\mu.$$

11.3. Ограниченность. *Если* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X};\mathbb{E})$, *то* $|f| \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X};\mathbb{R})$ *и*

$$\left|\int\limits_{\mathbb{X}} f\, d\mu\right| \le \int\limits_{\mathbb{X}} |f|\, d\mu = \|f\|.$$

Доказательство свойств 11.2 и 11.3 предоставляется читателю.

11.4. Задача. Если $f \le g$ и $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X};\mathbb{R})$, то $\int\limits_{\mathbb{X}} f\, d\mu \le \int\limits_{\mathbb{X}} g\, d\mu$.

11.5. Задача. Если f — постоянная, то она интегрируема на любом ограниченном промежутке $P = \langle a, b\rangle$ и $\int\limits_P f\, d\mu = f \cdot \mu(\langle a, b\rangle)$.

11.6. Задача. Если функция f непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, а мера μ счетно-аддитивна, то f интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, $a \le b$, и

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\, d\mu(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x).$$

(Справа интеграл Римана — Стильтьеса.)

11.7. Задача. Интегрируемая функция почти всюду конечна.

11.8. Задача. Пренебрежимая функция интегрируема и интеграл пренебрежимой функции равен нулю.

11.9. Задача. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду и $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$, то $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ и $\int\limits_{\mathbb{X}} f\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} g\,d\mu$.

12. Интеграл Лебега и предел

12.1. Лемма о замкнутости. *Если $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$ и $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ и $\int\limits_{\mathbb{X}} f_n\,d\mu \to \int\limits_{\mathbb{X}} f\,d\mu$.*

Доказательство. Так как каждая функция f_n интегрируема, то для каждой функции f_n существует функция $\varphi_n \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ такая, что $\|f_n - \varphi_n\| < n^{-1}$. Тогда $\|f - \varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает суммируемость функции f и существование интеграла $\int\limits_{\mathbb{X}} f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n\,d\mu$. Кроме того, по свойству ограниченности интеграла Лебега имеем

$$\left|\int\limits_{\mathbb{X}} f_n\,d\mu - \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi_n\,d\mu\right| \le \|f_n - \varphi_n\|,$$

откуда и вытекает требуемое утверждение о сходимости.

12.2. Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, $x \in \mathbb{X}$, называется *нормальным*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|g_n\|$.

12.3. Теорема о нормальных рядах. *Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ — нормальный ряд из интегрируемых функций, то*

1) *почти для каждого $x \in \mathbb{X}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ абсолютно сходится;*

2) *функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ интегрируема;*

3) $\int\limits_{\mathbb{X}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)\,d\mu(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} g_n(x)\,d\mu(x)$.

Доказательство. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ — нормальный ряд, то по свойству 8.10 интегральной нормы сумма ряда $G(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|$ имеет конечную интегральную норму. По лемме 10.3 функция $G(x)$ почти всюду конечна, и, следовательно, данный ряд сходится абсолютно для почти всех $x \in \mathbb{X}$. Отсюда вытекает утверждение 1. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что интегральное отклонение частичных сумм $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$ функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ от его суммы $f(x)$ стремится к нулю:

$$\|f - F_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|.$$

Отсюда, применяя лемму о замкнутости 12.1, получаем второе и третье утверждения теоремы.

12.4. Следствие. *Если последовательность f_n интегрируемых функций имеет ограниченную длину в $\mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\| < \infty\right)$, то*

1) *почти для каждого $x \in \mathbb{X}$ последовательность $f_n(x)$ имеет ограниченный предел в пространстве $\mathbb{E}$;*

2) *функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ интегрируема;*

3) $\int\limits_{\mathbb{X}} f(x)\, d\mu(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} f_n(x)\, d\mu(x)$.

Доказательство. Положим $g_n = f_n - f_{n-1}$, $f_0 \equiv 0$. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и его сумма равна $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

12.5. Следствие (Теорема Беппо Леви). *Если $h_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — монотонная последовательность вещественных интегрируемых функций и если $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|\int\limits_{\mathbb{X}} h_n\, d\mu\right| < \infty$, то функция $h(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$ интегрируема и*

$$\int\limits_{\mathbb{X}} h(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} h_n(x)\, d\mu(x).$$

Доказательство. Положим для определенности, что h_n монотонно возрастает. Проверим, что последовательность h_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет ограниченную длину. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} \|h_{k+1} - h_k\| = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{X}} |h_{k+1} - h_k| = \int\limits_{\mathbb{X}} (h_{n+1} - h_1) = \int\limits_{\mathbb{X}} h_{n+1} - \int\limits_{\mathbb{X}} h_1.$$

Отсюда получаем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|h_{k+1} - h_k\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}} h_{n+1} - \int\limits_{\mathbb{X}} h_1 < \infty$.

12.6. Теорема Ф. Рисса о полноте. *$\mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ — полное пространство.*

Для доказательства теоремы Рисса достаточно доказать следующую лемму.

12.7. Лемма. *Каждая последовательность Коши содержит подпоследовательность ограниченной длины.*

Доказательство. По определению фундаментальной последовательности существует N_1 такое, что для всех $k > N_1$ справедливо неравенство $\|f_k - f_{N_1}\| < 1/2$. Берем $n_1 = N_1$ в качестве первого номера подпоследовательности. Так как $\{f_m\}$ фундаментальна, то существует число N_2 такое, что $\|f_k - f_s\| < 1/2^2$ для всех $k, s > N_2$. Возьмем в качестве n_2 число, равное $\max(N_2, n_1,) + 1$. Тогда $\|f_{n_2} - f_{n_1}\| < 1/2$ и $\|f_k - f_{n_2}\| < 1/2^2$ для всех $k > n_2$.

Пусть определены номера $n_1 < n_2 < \ldots < n_l$ так, что $\|f_{n_i} - f_{n_{i-1}}\| < 1/2^i$ для всех $i = 2, \ldots, l$, и $\|f_k - f_{n_l}\| < 1/2^l$ для всех $k > n_l$. По определению фундаментальной последовательности существует n_{l+1} такое, что для всех $j, k > N_{l+1}$ справедливо неравенство $\|f_j - f_k\| < 1/2^{l+1}$. Возьмем в качестве n_{l+1} число $\max(N_{l+1}, n_l) + 1$. Тогда $\|f_{n_{l+1}} - f_{n_l}\| < 1/2^l$ и $\|f_k - f_{n_{l+1}}\| < 1/2^{l+1}$ для всех $k > n_{l+1}$, что соответствует индукционному предположению. Подпоследовательность $\{f_{n_l}\}$ имеет ограниченную длину:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|f_{n_{l+1}} - f_{n_l}\| \le \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} = 1.$$

12.8. Задача. Всякая последовательность Коши в пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ содержит почти всюду сходящуюся подпоследовательность.

12.9. Лемма о верхней огибающей. *Если последовательность $\{f_n\}$ интегрируемых функций ограничена сверху интегрируемой функцией h ($f_n(x) \le h(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$), то функция $\sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ интегрируема.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim\limits_{n\to\infty} h_n$, где $h_n = \sup\{f_k : 1 \le k \le n\}$, — возрастающая последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы Беппо Леви.

12.10. Задача. Сформулировать и доказать лемму о нижней огибающей.

12.11. Определение. Говорят, что последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ имеет *интегрируемую мажоранту*, если существует функция $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X};\mathbb{R})$ такая, что $|f_n(x)| \le h(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{X}$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

12.12. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. *Если последовательность интегрируемых функций f_n, сходящаяся почти всюду к функции f, обладает интегрируемой мажорантой, то f интегрируема и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} f \, d\mu.$$

Доказательство. 1 случай. Функции f_n принимают значения в $\overline{\mathbb{R}}$.

Заметим, что по леммам об огибающих, функции

$$\underline{g}_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\} \le f_n \le \overline{g}_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

интегрируемы. Таким образом, последовательности $\{\underline{g}_n\}$ и $\{\overline{g}_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы Беппо — Леви и $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{g}_n(x) = f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{g}_n(x)$ почти всюду. Поэтому функция $f(x)$ интегрируема и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} \underline{g}_n(x) \, d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{X}} f(x) \, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} \overline{g}_n(x) \, d\mu(x).$$

Остается написать

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \underline{g}_n(x) \, d\mu(x) \le \int\limits_{\mathbb{X}} f_n(x) \, d\mu(x) \le \int\limits_{\mathbb{X}} \overline{g}_n(x) \, d\mu(x),$$

и применить лемму о зажатой последовательности.

2 СЛУЧАЙ. Функции f_n принимают значения в $\mathbb{E}$. Фиксируем n и рассмотрим последовательность $|f_n - f_m|$, сходящуюся к $|f_n - f|$ почти всюду при $m \to \infty$. Мажорантой для этой последовательности служит $2h(x) : |f_n(x) - f_m(x)| \le 2h(x)$. По вышедоказанному функция $|f_n - f|$ интегрируема при любом $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $|f_n - f|$ сходится к 0 почти всюду при $n \to \infty$ и удовлетворяет условиям теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (1 случай): $|f_n(x) - f(x)| \le 2h(x)$. В силу вышесказанного $\|f_n - f\| = \int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f| \to 0$.

12.13. СЛЕДСТВИЕ. *Если* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$, *а множество* $U \subset \mathbb{X}$ *таково, что* $\chi_U \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{R})$. *Тогда* $f\chi_U$ *интегрируема на* $\mathbb{X}$ *и* $\|f\chi_U\| = \int\limits_U |f|\, d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ступенчатых функций сходится к функции f в норме $\mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ и почти всюду на $\mathbb{X}$, а последовательность $\{\psi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к функции χ_U в норме $\mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ и почти всюду на $\mathbb{X}$. Переходя, если необходимо, к срезкам $\widetilde{\psi}_n = \max(0, \min(1, \psi_n))$, можно считать, что последовательность ψ_n ограничена. Тогда последовательность интегрируемых функций $\varphi_n\psi_n$ сходится к функции $f\chi_U$ в норме $\mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$. Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{X}} |\varphi_n\psi_n - f\chi_U|\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} |\varphi_n\psi_n - f\psi_n + f\psi_n - f\chi_U|\, d\mu$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{X}} |(\varphi_n - f)| \cdot |\psi_n|\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{X}} |f| \cdot |\psi_n - \chi_U|\, d\mu.$$

Первый интеграл сходится к нулю, так как $|\psi_n| \le 1$, а второй — по теореме Лебега, так как $2|f|$ является интегрируемой мажорантой для последовательности $|f| \cdot |\psi_n - \chi_U|$, сходящейся к нулю почти всюду.

Из предыдущих утверждений легко получается

12.14. СЛЕДСТВИЕ. *Если последовательность* $\{f_n \in \mathcal{L}_1(A; \mathbb{E})\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^k$, *сходится к функции* f *равномерно на* A *и множество* A *ограничено, то* $f \in \mathcal{L}_1(A; \mathbb{E})$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n\, d\mu = \int\limits_A f\, d\mu.$$

12.15. Контрпримеры к теореме Лебега.

1) Пусть $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$. Тогда $f_n(x) \to 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$, а $\int f_n = 1$.

2) Пусть $f_n = n^{-1}\chi_{[-n,n]}$. Тогда $f_n(x) \to 0$ равномерно на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$, а $\int f_n = 2$.

3) Пусть $f_n = \chi_{[-n,n]}$. Тогда $f_n(x) \to 1 \notin \mathcal{L}_1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ при $n \to \infty$.

4) Пусть f_n — индикатор n-го промежутка следующей последовательности: $[-1,0]$, $[0,1], \ldots, [-n,-n+\frac{1}{n},]$, $[-n+\frac{1}{n}, -n+\frac{2}{n}], \ldots, [n-\frac{1}{n}, n], \ldots$. Тогда $\|f_n\| = \int f_n \to 0$, т. е. $f_n \to 0$ в пространстве $\mathcal{L}_1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ при $n \to \infty$. Однако, для любой точки $x \in \mathbb{R}$ последовательность $f_n(x)$ содержит бесконечное число единиц и бесконечное число нулей и потому не имеет предела.

13. Интеграл Римана

Пусть дана функция $f : P \to \mathbb{E}$, где P — замкнутый параллелепипед.

13.1. Определение. *Интегральной нормой Римана* функции f называется число $\|f\|_{\mathcal{R}} = \inf\{\int\limits_P \varphi\, d\mu\}$, где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi \in \mathrm{Step}(P,\ \mathbb{R})$ таким, что $|f(x)|_{\mathbb{E}} \le \varphi(x)$ для всех $x \in P$.

13.2. Определение. Функция $f : P \to \mathbb{E}$ называется *интегрируемой по Риману*, если существует такая последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n\}$, что $\|f - \varphi_n\|_{\mathcal{R}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда *интегралом Римана* функции f называется величина

$$\int\limits_P f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_P \varphi_n\, d\mu.$$

Корректность. Этот предел существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{\varphi_n\}$. Для ступенчатых функций введенный таким образом интеграл совпадает с элементарным (доказать!).

13.3. Определение. Для произвольного ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^k$ функция $f : U \to \mathbb{R}^k$ называется *интегрируемой по Риману*, если интегрируема по Риману функция $\widetilde{f} : P \to \mathbb{E}$, где $P \supset U$ —

некоторый замкнутый параллелепипед, определяемая следующим образом:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in U, \\ 0, & x \in P \setminus U. \end{cases}$$

Тогда *интегралом Римана* функции f называется величина

$$\int\limits_U f\,d\mu = \int\limits_P \widetilde{f}\,d\mu.$$

Корректность. Это определение не зависит от выбора параллелепипеда P.

Доказательство. Рассмотрим два параллелепипеда P_1 и P_2 таких, что $U \subset P_1$ и $U \subset P_2$ и функции $f_1 : P_1 \to \mathbb{E}$ и $f_2 : P_2 \to \mathbb{E}$ такие, что

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in U, \\ 0, & x \in P_1 \setminus U, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in U, \\ 0, & x \in P_2 \setminus U. \end{cases}$$

Если f_1 интегрируема, то существует последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n^1\}$ такая, что $\|f_1 - \varphi_n^1\|_{\mathcal{R}} \to 0$ при $n \to \infty$. Можно построить последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n^2\}$ такую, что $\|f_2 - \varphi_n^2\|_{\mathcal{R}} \to 0$ при $n \to \infty$, например:

$$\varphi_n^2(x) = \begin{cases} \varphi_n^1(x), & x \in P_1 \cap P_2, \\ 0, & x \in P_2 \setminus P_1. \end{cases}$$

По определению элементарного интеграла очевидно, что

$$\int\limits_{P_1} \varphi_n^1\,d\mu = \int\limits_{P_2} \varphi_n^2\,d\mu$$

для любого n и, следовательно,

$$\int\limits_{P_1} f_1\,d\mu = \int\limits_{P_2} f_2\,d\mu = \int\limits_U f\,d\mu,$$

что и требовалось доказать.

13.4. Свойства интеграла Римана

1. Линейность. Если функции $f : U \to \mathbb{E}$ и $g : U \to \mathbb{E}$ интегрируемы по Риману и $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\int\limits_U (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int\limits_U f\, d\mu + \beta \int\limits_U g\, d\mu.$$

2. Если функция $f : U \to \mathbb{E}$ интегрируема по Риману, то функция $|f(x)|_{\mathbb{E}} : U \to \mathbb{R}$ также интегрируема по Риману.

3. Ограниченность. Если функция $f : U \to \mathbb{E}$ интегрируема по Риману, то

$$\Big|\int\limits_U f\, d\mu\Big|_{\mathbb{E}} \le \int\limits_U |f|_{\mathbb{E}}\, d\mu.$$

4. Монотонность. Если функции $f : U \to \mathbb{R}$ и $g : U \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману и $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in U$, то

$$\int\limits_U f\, d\mu \ \le \int\limits_U g\, d\mu.$$

13.5. Первый критерий интегрируемости в терминах колебаний. *Функция $f : P \to \mathbb{E}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда когда f ограничена и для произвольного положительного числа ε существует такая конечная дизъюнктная совокупность кубов $\{Q_i\}$, что $P = \bigcup\limits_i Q_i$ и $\sum\limits_i \operatorname{osc}(f, Q_i)\mu(Q_i) < \varepsilon$ (здесь $\operatorname{osc}(f, Q_i) = \sup\limits_{y,z\in Q_i} |f(y) - f(z)|$ — колебание функции f на кубе Q_i).*

13.6. Второй критерий интегрируемости в терминах колебаний. *Функция $f : P \to \mathbb{E}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда когда f ограничена и для произвольных положительных чисел ε и δ существует такая конечная дизъюнктная совокупность кубов $\{Q_i\}$, что $P = \bigcup\limits_i Q_i$ и сумма мер кубов этой совокупности, на которых колебание функции f не меньше ε , меньше δ .*

13.7. Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *пренебрежимым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетная совокупность открытых кубов $\{Q_i\}$ такая, что $A \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ и $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(Q_i) < \varepsilon$.

13.8. Теорема. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. *Ограниченная функция $f : P \to \mathbb{E}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда когда f непрерывна всюду за исключением пренебрежимого множества Z.*

Доказательство. Пусть f интегрируема по Риману. Очевидно, что множество точек ее разрыва $Z \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $A_n = \Big\{x \in U : \operatorname{osc}(f,x) \geq \frac{1}{n}\Big\}$ (здесь $\operatorname{osc}(f,x) = \lim\limits_{r\to 0} \sup\limits_{y,z\in Q(x,r)} |f(y) - f(z)|$ — колебание функции f в точке x). Поэтому достаточно доказать, что все множества A_n пренебрежимы. Зафиксируем произвольное число $\delta > 0$. По второму критерию интегрируемости в терминах колебаний, для каждого A_n существует такая конечная дизъюнктная совокупность кубов $\{Q_i\}$, что $A_n \subset \bigcup\limits_i Q_i$ и сумма мер кубов этой совокупности, на которых колебание функции f не меньше $\frac{1}{n}$, меньше δ. По определению 13.7, множество A_n пренебрежимо для любого $n \in \mathbb{N}$, а, следовательно, и множество Z пренебрежимо.

Обратно, пусть множество Z точек разрыва функции f пренебрежимо. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению 13.7, существует не более чем счетная совокупность открытых кубов $\Delta = \{Q_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, покрывающая Z, такая, что

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(Q_i) < \frac{\varepsilon}{4d}, \tag{13.1}$$

где $d = \operatorname{diam}(P)$. Тогда, так как $P \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i \subset P \setminus Z$, то для любой точки $x \in P \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ выполняется $\operatorname{osc}(f,x) < \frac{\varepsilon}{2\mu(P)}$. По определению колебания, существует открытый куб $Q(x)$ такой, что

$$\operatorname{osc}(f, Q(x)) = \sup_{y,z\in Q(x)} |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(P)}. \tag{13.2}$$

Совокупность кубов $\big\{Q_i,\ Q(x) : i \in \mathbb{N},\ x \in P \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i\big\}$ образует открытое покрытие замкнутого параллелепипеда P. Из этой совокупности можно выделить конечное подпокрытие $\mathcal{B} = \{Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_l}, Q(x_1), \ldots, Q(x_m)\}$. Для системы кубов $\mathcal{B}$ существует такая конечная дизъюнктная система сегментов $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_p\}$, что любой куб из $\mathcal{B}$ равен объединению некоторой системы сегментов из $\mathcal{D}$, $\bigcup\limits_{D\in\mathcal{D}} D = \bigcup\limits_{Q\in\mathcal{B}} Q$.

На объединении $\bigcup\limits_{j=1}^{p} D_j$ определим ступенчатые функции

$$\psi_\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^{p}\operatorname{osc}(f,D_j)\chi_{D_j}(x) \quad \text{и} \quad \varphi_\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^{p} f(x_j)\chi_{D_j}(x),$$

где $x_j\in D_j$ — некоторая точка сегмента D_j. Тогда

$$\|f-\varphi_\varepsilon\|\le\|\psi_\varepsilon\|=\sum_{j=1}^{p}\operatorname{osc}(f,D_j)\mu(D_j\cap P)=$$
$$\sum_{j,D_j\subset\bigcup\limits_{n=1}^{l}Q_{i_n}}\operatorname{osc}(f,D_j)\mu(D_j\cap P)+\sum_{j,D_j\subset\bigcup\limits_{n=1}^{m}Q(x_n)}\operatorname{osc}(f,D_j)\mu(D_j\cap P)$$
$$\le 2d\cdot\frac{\varepsilon}{4d}+\frac{\varepsilon}{2\mu(P)}\cdot\mu(P)=\varepsilon. \quad (13.3)$$

В (13.3) при оценке первой суммы использованы неравенства $\operatorname{osc}(f,D_j)\le 2d$ и (13.1), а при оценке второй суммы — неравенства (13.2) и

$$\bigcup_{j,D_j\in\mathcal{D}}\mu(D_j\cap P)\le\mu(P).$$

Так как $\varepsilon>0$ — произвольное число, то функция f интегрируема по Риману, что и требовалось доказать.

13.9. Следствие.

Функция $f\equiv 1$, определенная на множестве U, интегрируема по Риману тогда и только тогда когда граница U пренебрежима (обосновать).

14. Интеграл как предел римановых сумм

14.1. Определение. *Пунктированным разбиением* $\mathcal{R}$ k-мерного сегмента U называется всякая система, состоящая из дизъюнктного набора k-мерных сегментов $P_1,\dots,P_s$, покрывающих U, и набора точек $\xi_i\in P_i$, $i=1,\dots,s$. *Интегральной* (римановой) суммой функции $f:U\to\mathbb{E}$, соответствующей пунктированному разбиению $\mathcal{R}=(P_1,\dots,P_s;\xi_1,\dots,\xi_s)$, называется элемент $S(\mathcal{R},f,|\cdot|)=\sum f(\xi_i)|P_i|\in\mathbb{E}$, где $|\cdot|$ — мера Лебега, определенная на дробящейся системе $\mathcal{S}^k$.

14.2. Теорема. *Если функция f ограничена и непрерывна почти в каждой точке сегмента U, то она интегрируема на U и*

$$\lim_{\delta(\mathcal{R})\to 0} S(\mathcal{R}, f, |\cdot|) \to \int\limits_U f(x)\,dx,$$

где $\delta(\mathcal{R}) = \max\{\operatorname{diam} P_i : i = 1, \dots, s\}$, и произвольном выборе точек $\xi_k \in P_k$.

14.3. Теорема. *Если функция $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема по Риману в несобственном смысле, то $f \in \mathcal{L}_1([a, b))$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b)} f(x)\,dx.$$

14.4. Задача. Функция может быть интегрируемой по Риману в несобственном смысле и неинтегрируемой по Лебегу. Рассмотреть функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$, $0 < p \le 1$, на промежутке $[1, \infty)$.

15. Измеримые функции и измеримые множества. Признаки интегрируемости

Фиксируем в этом параграфе множество с мерой $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$.

15.1. Необходимое условие интегрируемости. *Если функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ интегрируема, то имеется такая последовательность $\varphi_n : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$, $n \in \mathbb{N}$, ступенчатых функций, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{X}$.*

Доказательство вытекает из задачи 12.8.

15.2. Определение. Функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ называется *измеримой*, если существует такая последовательность $\varphi_n : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$, $n \in \mathbb{N}$, ступенчатых функций, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{X}$. Функция f *измерима на множестве* $U \subset \mathbb{X}$, если функция $f \cdot \chi_U$ измерима на $\mathbb{X}$.

15.3. Задача. Если функция f измерима на U и $g(x) = f(x)$ для почти всех $x \in U$, то функция g измерима на U.

15.4. Задача. Функция $f = (f_1, \dots, f_l) : \mathbb{X} \to \mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \dots \times \mathbb{E}_l$ измерима тогда и только тогда, когда измерима каждая ее компонента. В частности, функция $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^k$ измерима тогда и только тогда, когда измерима каждая ее координатная функция.

15.5. Задача. Сумма и произведение двух измеримых функций измеримы (доказать в предположении, что функции конечны почти всюду).

15.6. Задача. Если f измерима, то $|f|_\mathbb{E} : \mathbb{X} \ni x \mapsto |f(x)|_\mathbb{E}$ также измерима.

15.7. Определение. Если $\mathbb{E}$ — нормированное пространство и $g \in \mathbb{E}$, то положим

$$\operatorname{sign} g = \begin{cases} 0 \in \mathbb{E}, & \text{если } |g|_\mathbb{E} = 0, \\ \frac{g}{|g|_\mathbb{E}}, & \text{если } |g|_\mathbb{E} \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $h \in [0, \infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$ и $g \in \mathbb{E}$. Положим

$$\operatorname{cut}(h, g) = \min(h, |g|_\mathbb{E}) \operatorname{sign} g.$$

15.8. Задача. Отображение $\operatorname{sign} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ непрерывно на $\mathbb{E} \setminus \{0\}$.

15.9. Задача. Если $h_n \to h$, $g_n \to g$ при $n \to \infty$, то $\operatorname{cut}(h_n, g_n) \to \operatorname{cut}(h, g)$ при $n \to \infty$.

15.10. Определение. Пусть $h : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — неотрицательная вещественная функция. *h-срезкой функции* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ называется функция $\operatorname{cut}(h, f) : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$, определенная равенством

$$\operatorname{cut}(h, f)(x) = \operatorname{cut}(h(x), f(x)).$$

Непосредственно из определения вытекает неравенство

$$|\operatorname{cut}(h(x), f(x))|_\mathbb{E} \le \min(h(x), |f(x)|_\mathbb{E})$$

(доказать).

15.11. Задача. Нарисовать график функции $\operatorname{cut}(h, f)$, где $h(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = \sin x$.

15.12. Лемма о срезке. *Если одна из функций f или $h \geq 0$ измерима, а другая интегрируема, то h-срезка $\operatorname{cut}(h, f)$ функции f интегрируема.*

Доказательство. Пусть для определенности функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ интегрируема, а функция $h : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ измерима. Рассмотрим последовательность $\varphi_n : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ ступенчатых функций, сходящуюся к f как в $\mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$, так и почти всюду. Фиксируем также последовательность $\psi_n : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ступенчатых функций, сходящуюся к функции h почти всюду (не ограничивая общности, функции ψ_n всегда можно считать неотрицательными: если ψ_n — произвольная последовательность ступенчатых функций, сходящаяся к h почти всюду, то функции $\psi'_n = \max(0, \psi_n)$ ступенчатые, неотрицательные и сходятся к h почти всюду).

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|\operatorname{cut}(\psi_n, \varphi_m)| \leq \psi_n.$$

Так как ступенчатые функции $\operatorname{cut}(\psi_n, \varphi_m)$ сходятся к $\operatorname{cut}(\psi_n, f)$ почти всюду, то по теореме Лебега предел $\operatorname{cut}(\psi_n, f)$ — интегрируемая функция (здесь функция ψ_n играет роль интегрируемой мажоранты).

Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем неравенство

$$|\operatorname{cut}(\psi_n, f)| \leq |f|_{\mathbb{E}}.$$

Применяя опять теорему Лебега, получаем, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cut}(\psi_n, f) = \operatorname{cut}(h, f)$$

— интегрируемая функция.

15.13. Следствие (признак интегрируемости Лебега). *Если измеримая функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ обладает интегрируемой мажорантой (т. е., существует интегрируемая функция $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ такая, что $|f| \leq h$), то функция f интегрируема.*

Доказательство. Из условия следствия имеем $\operatorname{cut}(h, f) = f$. Так как h интегрируема, а f измерима, то по лемме о срезке функция f также интегрируема.

15.14. Лемма. *Пусть $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ совпадает почти всюду с пределом последовательности $\{f_m : \mathbb{X} \to \mathbb{E}\}$, $m \in \mathbb{N}$, измеримых функций. Тогда существует монотонно возрастающая последовательность неотрицательных ступенчатых функций $h_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, предел которой при $n \to \infty$ равен $+\infty$ в точках множества $\{x \in \mathbb{X} : f(x) \neq 0\}$.*

Доказательство. Функция f_m, $m \in \mathbb{N}$, равна пределу сходящейся к ней почти всюду при $i \to \infty$ последовательности ступенчатых функций $\psi_{m,i}$. Каждая ступенчатая функция $\psi_{m,i}$, $m, i \in \mathbb{N}$, есть линейная комбинация конечной совокупности характеристических функций $\chi_{Q_{mij}}$, где $j = 1, \ldots, j_{mi}$, а Q_{mij} — элемент дробящейся системы $\mathcal{S}$. Пусть $A = \bigcup\limits_{m,i \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{j=1}^{j_{mn}} Q_{mij}$. Функция f может быть отлична от нуля лишь в точках множества A. Перенумеруем все множества Q_{mij}: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots$. Положим $h_n(x) = n$ в точках множества $Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$ и равной нулю вне точек этого множества. Легко проверить, что последовательность ступенчатых функций h_n монотонно возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = +\infty$ для любой точки $x \in A$.

15.15. Теорема о пределе последовательности измеримых функций. *Функция, совпадающая почти всюду с пределом последовательности измеримых функций, измерима.*

Доказательство. Пусть функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ равна почти всюду пределу при $n \to \infty$ последовательности измеримых функций $g_m : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность неотрицательных ступенчатых функций $h_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, предел которой при $n \to \infty$ равен $+\infty$ в точках множества $\{x \in \mathbb{X} : f(x) \neq 0\}$ (существование такой последовательности доказано в лемме 15.14).

Срезки $f_n = \operatorname{cut}(h_n, f)$ интегрируемы по лемме о срезке и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ в силу задачи 15.9. Действительно, так как $f = \lim\limits_{m\to\infty} g_m$, то $f_n = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{cut}(h_n, g_m)$ в силу задачи 15.9, а функция $\operatorname{cut}(h_n, g_m)$ интегрируема по лемме о срезке. Поскольку для фиксированного n имеем $|\operatorname{cut}(h_n, g_m)| \leq h_n$, $m \in \mathbb{N}$, то к последовательности $\{\operatorname{cut}(h_n, g_m)\}$, $m \in \mathbb{N}$, можно применить теорему Лебега и получить интегрируемость функции f_n.

Для каждой функции f_n найдется ступенчатая функция $\varphi_n \in \operatorname{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ такая, что $\|f_n - \varphi_n\| \leq 2^{-n}$. Докажем, что $\varphi_n \to f$ почти всюду при $n \to \infty$. Заметим, что при всяком фиксированном m последовательность $\{\operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $f_m = \operatorname{cut}(h_m, f)$ почти всюду при $n \to \infty$. Действительно, $f_m = \operatorname{cut}(h_m, f) = \operatorname{cut}(h_m, f_n)$ при $n \geq m$ (проверить). Далее,

$$|f_m - \operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)| = |\operatorname{cut}(h_m, f_n) - \operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)| \leq |f_n - \varphi_n|$$

при $n \geq m$ (доказать, рассмотрев 4 случая:

1) $|\varphi_n(x)| \leq h_m(x)$ и $|f_n(x)| \leq h_m(x)$;
2) $|\varphi_n(x)| > h_m(x)$ и $|f_n(x)| > h_m(x)$;
3) $|\varphi_n(x)| \leq h_m(x)$ и $|f_n(x)| > h_m(x)$;
4) $|\varphi_n(x)| > h_m(x)$ и $|f_n(x)| \leq h_m(x)$).

Так как $\|f_n - \varphi_n\| \leq 2^{-n}$, то последовательность $\operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)$, $n = m, m+1, \ldots$, имеет ограниченную длину в силу неравенства треугольника: $\|\operatorname{cut}(h_m, \varphi_{n+1}) - \operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)\| \leq \|\operatorname{cut}(h_m, \varphi_{n+1}) - f_m\| + \|f_m - \operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)\| \leq 2^{1-n}$. Следовательно, по следствию 12.4 она сходится почти всюду.

Пусть A_m — совокупность точек $x \in \mathbb{X}$, где $\operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)$ не сходится к f_m. Множество $A = \bigcup\limits_m A_m$ пренебрежимо и, если $x \notin A$, то $\varphi_n(x)$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$. В самом деле, если $x \notin A$, то существует m такое, что $|f(x)|_{\mathbb{E}} < h_m(x)$ и тогда $f_m(x) = \operatorname{cut}(h_m(x), f(x)) = f(x)$. Следовательно, $\operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)(x)$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$, а так как $\operatorname{cut}(h_m, \varphi_n)(x) = \varphi_n(x)$ при достаточно больших n, в точке x имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

15.16. Следствие. *Если функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ измерима, то функция* $\operatorname{sign} f$ *также измерима.*

Доказательство. Пусть f равна почти всюду пределу последовательности ступенчатых функций ψ_m при $m \to \infty$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| > \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } |f(x)| \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{\psi}_m(x)$, где

$$\widetilde{\psi}_m(x) = \begin{cases} \psi_m(x), & \text{если } |\psi_m(x)| > \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } |\psi_m(x)| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

— ступенчатая функция, $m \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает также, что

$$\operatorname{sign} f_n(x) = \lim_{m\to\infty} \operatorname{sign} \widetilde{\psi}_m(x),$$

откуда получаем, что $\operatorname{sign} f_n(x)$ — измеримая функция. Далее, нетрудно видеть, что

$$\operatorname{sign} f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign} f_n(x).$$

Следовательно, по теореме 15.15 $\operatorname{sign} f(x)$ — измеримая функция.

15.17. Задача. Если функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}_1$ измерима, а отображение $\alpha : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ непрерывно, то функция $\alpha \circ f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}_2$ также измерима.

15.18. Определение. Если неотрицательная измеримая функция h не интегрируема на множестве $U \subset \mathbb{X}$, то положим

$$\int\limits_U h(x)\, d\mu(x) = \infty.$$

15.19. Задача. Если $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ измерима, то $\int\limits_{\mathbb{X}} |f|_{\mathbb{E}}\, d\mu = \|f\|$.

15.20. Лемма Фату. *Если последовательность $h_n : A \to \mathbb{R}$ неотрицательных измеримых функций сходится к функции $h : A \to \mathbb{R}$ почти всюду на множестве $A \subset \mathbb{X}$, то*

$$\int\limits_A h\, d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_A h_n\, d\mu. \tag{15.1}$$

Если, в частности, $h_n \le h$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\int\limits_A h_n\, d\mu \to \int\limits_A h\, d\mu$.

Доказательство. Содержательным является случай, когда правая часть (15.1) конечна, поскольку в противном случае доказывать нечего. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} h_n = h = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, где $g_n = \inf\limits_{k\ge n} h_k$ — измеримая функция (доказать). Так как последовательность g_n монотонно возрастает, то к ней применима теорема Беппо Леви:

$$\int\limits_A h\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A g_n\, d\mu.$$

Заметим, что $g_n \leq h_n$ почти всюду, поэтому

$$\int\limits_A g_n(x)\, d\mu \leq \int\limits_A h_n(x)\, d\mu.$$

Из последних двух соотношений с интегралами вытекает

$$\int\limits_A h\, d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_A h_n\, d\mu.$$

И, наконец, если $h_n \leq h$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\int\limits_A h_n\, d\mu \leq \int\limits_A h\, d\mu$ и поэтому $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_A h_n\, d\mu \leq \int\limits_A h\, d\mu$, откуда и вытекает требуемое.

15.21. Определение. Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ множество с мерой. Множество $A \subset \mathbb{X}$ называется *измеримым* или (μ-*измеримым*), если его характеристическая функция χ_A измерима. *Мерой* измеримого множества A называется число $\mu(A) = \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_A\, d\mu$. Совокупность всех измеримых множеств на $\mathbb{X}$ обозначается символом Σ.

Легко проверить, что пренебрежимые множества измеримы и имеют меру, равную нулю.

15.22. Теорема. *Совокупность измеримых множеств на $\mathbb{X}$ образует σ-кольцо.*

Доказательство. По определению σ-кольца надо установить, что вместе с измеримыми множествами A и B множество $A \setminus B$ также измеримо. Действительно, $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$, а так как функции χ_A и χ_B измеримы, то и функция $\chi_{A\setminus B}$ также измерима (см. 15.5). Далее, если множества A_n, $n \in \mathbb{N}$, измеримы, то характеристическая функция объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ равна $\sup\limits_n \chi_{A_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \max(\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_n})$, т. е. является пределом измеримых функций и поэтому также измерима (см. п. 15.15).

15.23. Измеримость лебеговых множеств. *Множество, определяемое счетной системой, состоящей из уравнений и неравенств, левые и правые части которых суть вещественнозначные измеримые функции, измеримо.*

Доказательство этого утверждения основывается на следующей лемме. Введем обозначение $\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \neq 0\}$.

15.24. Лемма. 1) *Пусть функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ такова, что множество*

$$E_f(a) = \{x \in \operatorname{supp} f : f(x) \geq a\},$$

измеримо для любого $a \in \mathbb{R}$. Тогда множества

(a) $\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) > a\}$,
(b) $\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) \leq a\}$,
(c) $\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) < a\}$,
(d) $\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) = a\}$,

также измеримы для любого $a \in \mathbb{R}$.

2) *Если $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, то множество $E_f(a) = \{x \in \operatorname{supp} f : f(x) \geq a\}$, а вместе с ним и множества* (a), (b), (c) *и* (d) *измеримы для любого $a \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$\operatorname{supp} f = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_f(n)$$

и поэтому $\operatorname{supp} f$ — измеримое множество. Для доказательства первого утверждения заметим, что

$$\begin{aligned}
&\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) < a\} = \operatorname{supp} f \setminus E_f(a),\\
&\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) > a\} = \bigcup_{m} E_f(a + m^{-1}),\\
&\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) \leq a\} = \operatorname{supp} f \setminus \{x \in \operatorname{supp} f : f(x) > a\},\\
&\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) = a\}\\
&\qquad = \operatorname{supp} f \setminus \big[\{x \in \operatorname{supp} f : f(x) > a\} \cup \{x \in \operatorname{supp} f : f(x) < a\}\big].
\end{aligned}$$

Для доказательства второго утверждения рассмотрим последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(x)$ такую, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ почти всюду. Тогда с точностью до множества нулевой меры

$$\begin{aligned}
E_f(a) &= \{x \in \operatorname{supp} f : f(x) \geq a\}\\
&= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \Big\{x \in \operatorname{supp} \varphi_k : \varphi_k(x) \geq a - \frac{1}{m}\Big\}.
\end{aligned}$$

Поскольку множество $\left\{x \in \operatorname{supp}\varphi_k : \varphi_k(x) \geq a - \frac{1}{m}\right\}$ состоит из объединения нескольких элементов дробящейся системы $\mathcal{S}$ и поэтому измеримо, то множества, получаемые из них в результате счетных пересечений и объединений, также измеримы, так как совокупность измеримых множеств Σ образует σ-кольцо. Таким образом, доказана измеримость множества $E_f(a)$. Измеримость множеств (a), (b), (c) и (d) вытекает из первого утверждения. Лемма доказана.

Приведенная лемма мотивирует следующий вопрос: *можно ли измеримость функции $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ охарактеризовать через измеримость лебеговых множеств $E_g(a) = \{x \in \operatorname{supp} g : g(x) \geq a\}$, $a \in \mathbb{R}$?* Ниже мы даем утвердительный ответ на этот вопрос.

15.25. Определение. Функция $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если множество ее значений $g(\mathbb{X})$ конечно.

Очевидно, что характеристическая функция любого множества $A \subset \mathbb{X}$ является простой.

Пусть совокупность значений простой функции $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ состоит из различных элементов $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Пусть

$$A_i = \{x \in \mathbb{X} : g(x) = c_i \neq 0\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Тогда

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}.$$

Таким образом, каждая простая функция является конечной линейной комбинацией характеристических функций.

15.26. Лемма. *Простая функция g измерима тогда и только тогда, когда множества $A_1, \ldots, A_n$ измеримы.*

Доказательство. Ясно, что если g измерима, то множества $A_1, \ldots, A_n$ измеримы.

Если теперь множества $A_1, \ldots, A_n$ измеримы, то для характеристической функции χ_{A_i} каждого из них, существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_{i,k} \in \operatorname{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ такая, что $\chi_{A_i}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{i,k}(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{X}$. Тогда последовательность

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{i,k}(x)$$

ступенчатых функций сходится к функции $g(x)$ почти всюду на $\mathbb{X}$, откуда следует ее измеримость.

15.27. Лемма. *Пусть лебеговы множества*

$$E_f(a) = \{x \in \operatorname{supp} f : f(x) \geq a\}$$

функции $f : \mathbb{X} \to [0, \infty]$ *измеримы для любого* $a > 0$. *Тогда*

1) *существует возрастающая последовательность* $g_n : \mathbb{X} \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, *простых измеримых функций, предел которой равен* f*;*

2) *функция* f *измерима.*

Доказательство. Заметим, что если множества $E_f(a) = \{x \in \operatorname{supp} f : f(x) \geq a\}$ измеримы для любого $a > 0$, то и все типы множеств, определенные в лемме 15.24, также измеримы. Определим измеримые множества

$$A_{n,i} = \left\{x \in \mathbb{X} : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \quad B_n = \{x : f(x) \geq n\}$$

при $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n2^n$. Последовательность функций

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{A_{n,i}}(x) + n\chi_{B_n}(x)$$

обладает требуемыми свойствами.

По лемме 15.26 каждая из функций $g_n(x)$ измерима. Поэтому и ее предел f — также измеримая функция.

15.28. Теорема об измеримости функций. *Пусть лебеговы множества* $E_g(a) = \{x \in \operatorname{supp} g : g(x) \geq a\}$ *функции* $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *измеримы для любого* $a \in \mathbb{R}$. *Тогда функция* g *измерима.*

Доказательство. Заметим, что если множества $E_g(a) = \{x \in \operatorname{supp} g : g(x) \geq a\}$ измеримы для любого $a \in \mathbb{R}$, то и все типы множеств, определенные в лемме 15.24, также измеримы. Отсюда вытекает, что для функции $f = -g$ множества $E_f(a) = \{x \in \operatorname{supp} f : f(x) \geq a\}$ также измеримы для любого $a \in \mathbb{R}$. Поэтому достаточно доказать измеримость положительной части функции $g_+ = \max(g, 0)$, так как ее отрицательная часть $g_- = g_+ - g$ равна $\max(-g, 0)$. Измеримость функции g_+ доказана в лемме 15.27.

16. Повторный интеграл

В этом разделе мы сформулируем теоремы о повторном интегрировании функций на произведении множеств с мерой. Доказательство теоремы 16.1 приводится в конце раздела.

16.1. Теорема Фубини. *Пусть* $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ *и* $(\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}, \nu)$ *— два множества с мерой,* $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}, \lambda)$ *— их произведение. Если функция* $f(x,y)$ *интегрируема на* $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, $x\in\mathbb{X}$, $y\in\mathbb{Y}$, *то*

1) *для почти всех* $x\in\mathbb{X}$ *функция* $f(x,y)$ *переменной* y *интегрируема на* $\mathbb{Y}$*;*

2) *функция* $J(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f(x,y)\,d\nu(y)$ *переменной* x *интегрируема на* $\mathbb{X}$*;*

3) $\int\limits_{\mathbb{X}}\left(\int\limits_{\mathbb{Y}} f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x,y)\,d\lambda.$

Если для некоторой функции $f(x,y)$ справедливы утверждения 1 и 2 теоремы Фубини, то говорят, что определен повторный интеграл $\int\limits_{\mathbb{X}}\int\limits_{\mathbb{Y}} f$. По теореме Фубини для любой интегрируемой на $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ функции $f(x,y)$ определены и равны три интеграла: $\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f$, $\int\limits_{\mathbb{X}}\int\limits_{\mathbb{Y}} f$, $\int\limits_{\mathbb{Y}}\int\limits_{\mathbb{X}} f$.

16.2. Задача. Для интегрируемой на произведении $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}$ функции $f(x,y,z)$ определены и равны тринадцать интегралов: $\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}} f$, $\int\limits_{\mathbb{Y}}\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Z}} f$, $\int\limits_{\mathbb{X}}\int\limits_{\mathbb{Y}}\int\limits_{\mathbb{Z}} f$, ...

16.3. Задача. Сформулировать и написать теорему Фубини для случая $\mathbb{X}=\mathbb{R}^k$, $\mathbb{Y}=\mathbb{R}^l$, $\mathbb{Z}=\mathbb{R}^{k+l}$ и меры Лебега, определенной на многомерных сегментах.

16.4. Контрпример.

16.5. Теорема Фубини для подмножеств произведения. *Пусть* $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}, \lambda)$ *— произведение множеств с мерой,* $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ *и* $(\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}, \nu)$. *Если* $f(x,y)$ *интегрируема на множестве* $U\subset\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, *то*

1) *для почти всех* $x\in\mathbb{X}$ *функция* $f(x,y)$ *переменной* y *интегрируема на множестве* $U_x = \{y\in\mathbb{Y}\mid (x,y)\in U\}$*;*

2) *функция* $J(x) = \int\limits_{U_x} f(x,y)\,d\nu(y)$ *переменной* x *интегрируема на множестве* $\operatorname{Pr}_{\mathbb{X}} U = \{x\in\mathbb{X}\mid U_x\neq\emptyset\}$*;*

3) $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{Pr}_{\mathbb{X}} U} \left(\int\limits_{U_x} \varphi(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_{U} \varphi(x, y)\, d\lambda.$

16.6. Следствие. *Если U — пренебрежимое множество пространства $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, то для почти каждого $x \in \mathbb{X}$ множество U_x пренебрежимо в $\mathbb{Y}$.*

16.7. Теорема Тоннели. *Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ и $(\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}, \nu)$ — два множества с мерой, а $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}, \lambda)$ — их произведение. Если $h(x, y)$ — неотрицательная измеримая функция на $U \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, то*

1) *для почти всех $x \in \mathbb{X}$ функция $h(x, y)$ переменной y измерима на множестве $U_x \subset \mathbb{Y}$;*

2) *функция $J(x) = \int\limits_{U_x} h(x, y)\, d\nu(y)$ переменной x измерима на множестве $\mathrm{Pr}_{\mathbb{X}} U$;*

3) $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{Pr}_{\mathbb{X}} U} \left(\int\limits_{U_x} h(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_{U} h(x, y)\, d\lambda.$

16.8. Теорема. *Если функция $f(x)$ измерима (интегрируема) на $\mathbb{X}$, функция $g(y)$ измерима (интегрируема) на $\mathbb{Y}$, то функция $f(x)\cdot g(y)$ измерима (интегрируема) на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.*

16.9. Следствие. *Если функция $f(x)$ измерима на $\mathbb{X}$, то функция $g(x, y) = f(x)$ измерима на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, если $\mathbb{Y}$ измеримо.*

16.10. Задача. Если функция $f(x, y)$ измерима на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ и для почти всех $x \in \mathbb{X}$ функция $f(x, y)$ переменной y интегрируема на $\mathbb{Y}$, то функция $J(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y)\, d\mu(y)$ измерима на $\mathbb{X}$.

16.11. Доказательство теоремы 16.1. Для доказательства теоремы нам потребуется следующая

16.12. Лемма о повторной норме. *Пусть даны два множества с мерой $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ и $(\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{Y}}, \nu)$, и их произведение $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}, \lambda)$. Если $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{E}$ — произвольная функция, то*

$$\int^*_{\mathbb{X}} \left(\int^*_{\mathbb{Y}} |f(x, y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \le \int^*_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} |f(x, y)|\, d\lambda.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По определению интегральной нормы существует неубывающая последовательность неотрицательных ступенчатых функций $\varphi_n \in \mathrm{Step}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}; \mathbb{R})$ такая, что

$$\varepsilon + \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}^{*} |f(x,y)|\, d\lambda \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\, d\lambda \quad \text{и} \quad |f(x,y)| \leq \sup_{n} \varphi_n(x,y)$$

Применяя элементарную теорему Фубини, а затем теорему Беппо Леви, имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon + \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}^{*} |f(x,y)|\, d\lambda \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\, d\lambda \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\, d\nu(y) \Bigg) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{X}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\, d\nu(y) \Bigg) d\mu(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{X}}^{*} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\, d\nu(y) \Bigg) d\mu(x) \geq \int\limits_{\mathbb{X}}^{*} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{Y}}^{*} |f(x,y)|\, d\nu(y) \Bigg) d\mu(x).
\end{aligned}$$

Так как ε — произвольное положительное число, то лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы Фубини. Рассмотрим для этого последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(x,y)$ на $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ такую, что $\|f - \varphi_n\| \leq 2^{-n}$. Положим

$$H_n(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}}^{*} |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\, d\nu(y).$$

В силу леммы 16.12

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{X}}^{*} H_n(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{X}}^{*} \int\limits_{\mathbb{Y}}^{*} |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\, d\nu(y)\, d\mu(x) \\
\leq \|f - \varphi_n\| \leq 2^{-n}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{X}}^{*} \sum_{n\in\mathbb{N}} H_n(x)\, d\mu(x) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{X}}^{*} H_n(x)\, d\mu(x) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1,$$

Таким образом, сумма $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n(x)$ имеет конечную интегральную норму и из леммы 10.3 вытекает, что функциональный ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n(x)$ сходится для почти всех $x \in \mathbb{X}$. Отсюда имеем, что $H_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$

для почти всех $x \in \mathbb{X}$, или

$$\int\limits_{\mathbb{Y}}^{*} |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\, d\nu(y) \to 0$$

для почти всех $x \in \mathbb{X}$. Следовательно, $f(x,y)$ интегрируема на $\mathbb{Y}$ для почти всех $x \in \mathbb{X}$.

Положим $J(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f(x,y)\, d\nu(y)$. В силу неравенств

$$\int\limits_{\mathbb{X}}^{*} \left| J(x) - \int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\, d\nu(y) \right| d\mu(x) \le \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\, d\lambda \le 2^{-n}$$

функция $J(x)$ интегрируема на $\mathbb{X}$ и

$$\int\limits_{\mathbb{X}} J(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_{\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \varphi_n(x,y)\, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x,y)\, d\lambda.$$

16.13. Лемма. *График измеримой функции $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ есть пренебрежимое множество в $\mathbb{R}^{k+l}$.*

16.14. Определение. Для неотрицательной функции $h : A \to \mathbb{R}$ множество $\Gamma_- = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} \mid 0 \le y \le h(x)\}$ называется ее *подграфиком.*

16.15. Формула Кавальери — Лебега. *Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}, \mu)$ — множество с мерой, $A \subset \mathbb{X}$ — измеримое множество, а $h : A \to \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая функция. Тогда*

$$\int\limits_{A} h(x)\, d\mu(x) = \lambda(\Gamma_-) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \mu(E_h(y))\, dy,$$

где $E_h(y) = \{x \in A : h(x) \ge y\}$ — множество Лебега функции h, а λ — мера на произведении $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$ (на $\mathbb{R}$ рассматривается мера Лебега).

Доказательство. Подграфик функции Γ_- — измеримое множество в $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$. Тогда, с одной стороны, по теореме Тоннели имеем

$$\lambda(\Gamma_-) = \int\limits_{A\times\mathbb{R}} \chi_{\Gamma_-}\, d\lambda = \int\limits_{A} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{\Gamma_-}(x,y)\, dy \right) d\mu(x) = \int\limits_{A} h(x)\, d\mu(x).$$

С другой стороны, по теореме Тоннели имеем

$$\lambda(\Gamma_-) = \int\limits_{A\times\mathbb{R}} \chi_{\Gamma_-}\, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{A} \chi_{\Gamma_-}(x,y)\, d\mu(x) \Big)\, dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+} \mu(\{x \in A : (x,y) \in \Gamma_-\})\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \mu(E_h(y))\, dy,$$

поскольку $E_h(y) = \{x \in A : (x,y) \in \Gamma_-\}$.

В § 14 будет доказано, что мера Лебега куба $B(0,r) \subset \mathbb{R}^k$ равна $r^k\Omega_k$, где $\Omega_k = |B(0,1)|$. Используя этот результат с помощью формулы Кавальери — Лебега, получаем следующее

16.16. Следствие. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — компактная окрестность нуля и $u(x) = |x|^\nu$. Для меры Лебега на $\mathbb{R}^k$ имеем*

1) *$u \in \mathcal{L}_1(U)$ тогда и только тогда, когда $\nu > -k$;*

2) *$u \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k \setminus U)$ тогда и только тогда, когда $\nu < -k$.*

17. Интеграл и мера. Мера и топология

Напомним, что множество $A \subset \mathbb{X}$ называется измеримым, если его характеристическая функция χ_A измерима. Мерой измеримого множества A называется число $\mu(A) = \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_A\, d\mu$. Легко проверить, что пренебрежимые множества измеримы и имеют меру, равную нулю. Совокупность всех измеримых множеств на $\mathbb{X}$ обозначается символом Σ. В теореме 15.22 доказано, что совокупность Σ всех измеримых множеств на $\mathbb{X}$ образует σ-кольцо.

17.1. Неравенство Чебышёва. *Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ — множество с мерой, а $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X};\mathbb{R})$ — интегрируемая функция. Тогда для любого $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\mu(\{x \in \mathbb{X} : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int\limits_{\mathbb{X}} |f(x)|\, d\mu(x). \tag{17.1}$$

Доказательство. Так как f — измеримая функция, то множество Лебега $E_{|f|}(t) = \{x \in \operatorname{supp} f : |f|(x) \geq t\}$ — измеримое множество.

Более того, $t\chi_{E_{|f|}(t)}(x) \le |f|(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$. В силу монотонности интеграла Лебега отсюда получаем требуемое:

$$t\mu(\{x \in \mathbb{X} : |f(x)| \ge t\}) = \int\limits_{\mathbb{X}} t\chi_{E_{|f|}(t)}(x)\, d\mu(x) \le \int\limits_{\mathbb{X}} |f(x)|\, d\mu(x).$$

17.2. Следствие. *Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ — множество с мерой, а $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ — интегрируемая функция. Если для любого измеримого множества $A \subset \operatorname{supp} f$ положительной меры выполняется неравенство*

$$\int\limits_{A} f(x)\, d\mu(x) \ge 0,$$

то $f(x)$ принимает неотрицательные значения для почти всех $x \in \mathbb{X}$.

Доказательство. Пусть, напротив, для некоторого $t < 0$ множество $A = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \le t\}$ имеет положительную меру. Тогда, применяя к функции $g = f\chi_A$ неравенство Чебышёва, получаем

$$\mu(A) = \mu(\{x \in \mathbb{X} : |g(x)| \ge |t|\}) \le \frac{1}{|t|} \int\limits_{\mathbb{X}} |g(x)|\, d\mu(x) = \frac{1}{|t|} \int\limits_{A} f(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Следствие доказано.

17.3. Теорема о счетной аддитивности интеграла. *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ — неотрицательная функция и $\big\{A_n \in \Sigma\big\}$, $n \in \mathbb{N}$, — совокупность попарно непересекающихся измеримых множеств. Тогда*

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} f\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{A_n} f\, d\mu.$$

Доказательство. Положим $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Заметим, что функция $f \cdot \chi_{A_n}$ измерима для любого $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, $f \cdot \chi_A = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f \cdot \chi_{A_n}$ и последовательность частичных сумм этого ряда монотонно возрастает. Чтобы закончить доказательство этого утверждения, достаточно применить теорему Беппо Леви.

17.4. Теорема о счетной аддитивности меры. *Пусть $\{A_n \in \Sigma\}$, $n \in \mathbb{N}$, — совокупность попарно непересекающихся измеримых множеств. Тогда*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Доказательство. Применяя теорему о счетной аддитивности интеграла, получаем

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \int\limits_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

17.5. Лемма. *Мера монотонна относительно включения: $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.*

Доказательство. Если множества A и B измеримы и $A \subset B$, то множество $B \setminus A$ также измеримо и $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Так как $\mu(B \setminus A) \geq 0$, то лемма доказана.

Из предыдущих утверждений можно получить

17.6. Следствие. *Пусть последовательность измеримых множеств возрастает: $A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$. Тогда*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Если последовательность измеримых множеств убывает: $A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $\mu(A_1) < \infty$, то

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

17.7. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{X};\mathbb{E})$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\Big|\int\limits_A f\,d\mu\Big| < \varepsilon$$

для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{X}$, $\mu(A) < \delta$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Существует ступенчатая функция $\varphi \in \mathrm{Step}(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ такая, что $\|f - \varphi\| < \varepsilon/2$. Теперь достаточно доказать, что существует $\delta > 0$ такое, что $\left|\int\limits_A \varphi\, d\mu\right| < \varepsilon/2$ для любого измеримого множества A, удовлетворяющего условию $\mu(A) < \delta$. В самом деле, ступенчатая функция φ является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций: $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{B_n}$, где $\{B_n\}$ — дизъюнктная система множеств. Положим $M = \max(|\alpha_1|_{\mathbb{E}}, \ldots, |\alpha_N|_{\mathbb{E}})$. Тогда при $\delta = \varepsilon/2MN$ для любого измеримого множества A, $\mu(A) < \delta$, имеем

$$\left|\int\limits_A \varphi\, d\mu\right| \leq \int\limits_A \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|_{\mathbb{E}} \chi_{B_n \cap A}\, d\mu \leq MN\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В результате получаем

$$\left|\int\limits_A f\, d\mu\right| \leq \int\limits_A |f - \varphi|\, d\mu + \left|\int\limits_A \varphi\, d\mu\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

17.8. Теорема о регулярных мерах. *Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, \mu)$ — множество с регулярной мерой. Если $A \in \Sigma$ — измеримое в $\mathbb{R}^k$ множество конечной меры $\mu(A)$, то для любого $\eta > 0$ существуют измеримые замкнутое множество F и открытое множество U такие, что $F \subset A \subset U$ и $\mu(U \setminus F) < \eta$.*

Доказательство. Фиксируем $\eta > 0$. Возьмем число $\varepsilon > 0$, точное значение которого будет выбрано позже. Поскольку $\|\chi_A\| = \mu(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \chi_A\, d\mu$, по определению интегральной нормы существует монотонно возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, неотрицательных ступенчатых функций такая, что

$$\sup_n \varphi_n(x) \geq \chi_A(x) \quad \text{и} \quad \sup_n \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_n\, d\mu = \sup_n \|\varphi_n\| \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

Определим множества $A_n = \{x \in \mathbb{R}^k : \varphi_n(x) \geq 1 - \varepsilon\}$. По лемме 10.2 имеем оценку

$$\mu(A_n) = \|\chi_{A_n}\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|\varphi_n\| \leq \frac{\mu(A) + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \mu(A) + O(\varepsilon).$$

Так как последовательность φ_n монотонно возрастает, то $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая вышесказанные свойства, получаем

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = B, \quad \mu(A) \le \mu(B), \quad \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \le \mu(A) + O(\varepsilon).$$

Каждое множество A_n является объединением конечной совокупности элементов из $\mathcal{S}^k$. Так как мера μ регулярна на сегментах, то каждый из них можно заключить в открытый k-мерный сегмент так, что объединение U_n «раздутых» открытых k-мерных сегментов содержит A_n и $\mu(A_n) \le \mu(U_n) \le \mu(A_n) + \varepsilon/2^n$. Заметим, что $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = B \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus A_n)$, и поэтому

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \le \mu(B) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus A_n) = \mu(A) + O(\varepsilon) + \varepsilon = \mu(A) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, открытое множество $U = \bigcup\limits_n U_n$ содержит множество A и обладает свойством $\mu(U \setminus A) < \eta/2$ при любом выборе $\varepsilon \le \varepsilon_1$, где ε_1 — подходяще выбранное по η число.

Чтобы доказать существование замкнутого множества с требуемыми свойствами, заметим, что $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{A \cap B(0,n)\}$ и по следствию 17.6 имеем $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A \cap B(0,n))$. Поэтому существует такое n, что $\mu(A \setminus (A \cap B(0,n))) < \eta/4$. Кроме того, множество $A' = A \cap B(0,n)$ ограничено. Пусть A' содержится в замкнутом кубе Q. Множество $Q \setminus A'$ измеримо и существует открытое множество $V \supset Q \setminus A'$ такое, что $\mu(V \setminus (Q \setminus A')) < \eta/4$. Тогда множество $F = Q \setminus V \subset A'$ замкнуто и $A' \setminus F = A' \setminus (Q \setminus V) = A' \cap V = V \setminus (Q \setminus A')$. Отсюда $\mu(A' \setminus F) < \eta/4$. Таким образом, $\mu(A \setminus F) = \mu(A \setminus A') + \mu(A' \setminus F) < \eta/2$.

Следовательно, множества F и U с требуемыми свойствами построены и теорема доказана.

17.9. Определение. Минимальная σ-алгебра множеств в $\mathbb{R}^k$, содержащая все открытые и замкнутые множества, называется *σ-алгеброй борелевских множеств в $\mathbb{R}^k$*.

17.10. Следствие. *Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, \mu)$ — множество с регулярной мерой. Если измеримое множество $A \subset \mathbb{R}^k$ имеет конечную меру, то существуют борелевские множества $F_\delta \subset A \subset U_\sigma$ такие, что*

$$\mu(A \setminus F_\delta) = \mu(U_\sigma \setminus A) = 0.$$

При этом
$$F_\delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n,$$
где $F_1 \subset F_2 \subset \ldots F_n \ldots$ — *возрастающая последовательность замкнутых множеств, а*
$$U_\sigma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$
где $U_1 \supset U_2 \supset \ldots U_n \ldots$ — *убывающая последовательность открытых множеств. В частности,*
$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(F_\delta) = \mu(A) = \mu(U_\sigma) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n).$$

Доказательство. По теореме 17.8 для любого $m \in \mathbb{N}$ существует замкнутое (открытое) множество $B_m \subset A$ ($A \subset G_m$) такое, что $\mu(A\setminus B_m) \leq \frac{1}{m}$ $(\mu(G_m \setminus A) \leq \frac{1}{m})$. Последовательность замкнутых (открытых) множеств $F_n = \bigcup\limits_{m=1}^{n} B_m \subset A$ $\left(A \subset U_n = \bigcap\limits_{m=1}^{n} G_m\right)$ возрастает (убывает). Положим
$$F_\delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \quad \text{и} \quad U_\sigma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$
Тогда
$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(F_\delta) = \mu(A),$$
поскольку $\mu(A \setminus F_n) \leq \mu(A \setminus B_n) \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, и
$$\lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = \mu(U_\sigma) = \mu(A),$$
поскольку $\mu(U_n\setminus A) \leq \mu(G_n\setminus A) \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Из доказанного результата и следствия 17.2 получаем

17.11. Следствие. *Пусть* $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, \mu)$ — *множество с регулярной мерой, а* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ — *интегрируемая функция. Если для любого открытого измеримого множества* $U \subset \mathbb{R}^k$ *положительной меры выполняется неравенство*
$$\int\limits_U f(x)\, d\mu(x) \geq 0,$$
то f — *неотрицательная функция.*

Доказательство. Действительно, применяя следствие 17.10, предельным переходом получаем

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) \geq 0$$

для для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^k$. Теперь утверждение вытекает из следствия 17.2.

17.12. Следствие. *Если множество $A \subset \mathbb{R}^k$ имеет нулевую меру, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U \supset A$ такое, что $\mu(U) < \varepsilon$. Существует борелевское множество $U_\sigma \supset A$ такое, что $\mu(U_\sigma) = 0$.*

17.13. Геометрическое определение пренебрежимого множества. Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, \mu)$ — множество с регулярной мерой. Заметим, что открытые k-мерные сегменты п. 17.8 можно заменить на открытые k-мерные кубы. Таким образом, получаем следующее свойство пренебрежимого множества (множества нулевой меры)*: если множество $A \subset \mathbb{R}^k$ имеет нулевую меру, то для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетная совокупность $\{Q_i\}$ открытых k-мерных кубов такая, что $A \subset \bigcup\limits_i Q_i$ и $\sum\limits_i |Q_i| < \varepsilon$.*

17.14. Задача. Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, \mu)$ — множество с регулярной мерой. Доказать, что сформулированное свойство пренебрежимого множества является характеристическим: *если множество $A \subset \mathbb{R}^k$ может быть покрыто не более чем счетной совокупностью открытых k-мерных кубов, сумма мер которых меньше любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon > 0$, то множество A пренебрежимо. Показать, что открытые кубы можно заменить на произвольные.*

17.15. Теорема об измеримости почти всюду непрерывной функции. *Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, \mu)$ — множество с мерой. Если сужение функции $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{E}$ на дополнение $\mathbb{R}^k \setminus Z$ к некоторому пренебрежимому множеству Z непрерывно, то f измерима.*

Доказательство. Для доказательства измеримости функции f построим последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n\}$, сходящуюся к ней почти всюду.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

1-ЫЙ ШАГ. Рассмотрим куб $Q_1 = Q(0,1) \subset \mathbb{R}^k$ и определим ступенчатую функцию φ_1 следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f(x_1), \text{ где } x_1 \in Q_1 \setminus Z & \text{— произвольная точка, если } x \in Q_1; \\ 0, \text{ в остальных точках } \mathbb{R}^k. \end{cases}$$

N-ЫЙ ШАГ. Рассмотрим куб $Q_n = Q(0,n) \subset \mathbb{R}^k$ и построим дизъюнктную совокупность, состоящую из n^{2k} равных кубов $\{Q_{n,i}\}$, где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^{2k}$, радиуса $\frac{1}{n}$, такую что $Q_n = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_{n,i}$. Обозначим через $\{x_{n,i}\}$ произвольную последовательность точек, таких что $x_{n,i} \in Q_{n,i} \setminus Z$. Теперь определим ступенчатую функцию $\varphi_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{E}$ следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(x_{n,i}), & \text{если } x \in Q_{n,i}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^k \setminus Q_n. \end{cases}$$

Пусть $x \notin Z$ — точка непрерывности функции f. Тогда существует такое r, что для любых $y \in Q(x,r)$ выполняется $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. По построению, существует такие номера $n_0,\ i$, что $x \in Q_{n_0,i}$ и $\mathrm{rad}(Q_{n_0,i}) = \frac{1}{n_0} < \frac{r}{2}$. Тогда для любых $n \geq n_0$ выполняется $|\varphi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, т. е. $\{\varphi_n\}$ сходится к f почти всюду.

17.16. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, \mu)$ — множество с регулярной мерой. Открытые и замкнутые подмножества пространства $\mathbb{R}^k$ измеримы относительно меры μ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что пространство $\mathbb{R}^k$ измеримо: $\mathbb{R}^k = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{Q(0,n)}$. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^k$ замкнуто. Тогда функция $f(x) = \mathrm{dist}(x,A) = \inf\limits_{y\in A} \|x-y\|_{\mathbb{R}^k}$ непрерывна и поэтому в силу теоремы 17.15 измерима. Следовательно, множество $A = f^{-1}(0) = \mathbb{R}^k \setminus \operatorname{supp} f$ измеримо. Поэтому открытое множество, как дополнение к замкнутому, также измеримо.

17.17. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, \mu)$ — множество с регулярной мерой. Тогда σ-алгебра μ-измеримых множеств содержит σ-алгебру борелевских множеств.*

18. Двоичные кубы и некоторые элементарные теоремы о разбиениях

В этом и последующих параграфах рассматривается множество с мерой $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, |\cdot|)$, $k \in \mathbb{N}$, где $|\cdot|$ — мера Лебега. Измеримость множеств подразумевается только относительно меры Лебега.

Символом $Q(a, r)$ будем обозначать шар в метрике $|\cdot|_\infty$: $Q(a,r) = \{y \in \mathbb{R}^k : |y_i - a_i| < r$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k\}$. Число r называется *радиусом* куба $Q = Q(a, r)$ и обозначается символом $\mathrm{rad}(Q)$. Напомним, что $|x|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_k|)$.

Множество $\mathbb{Z}^k$ точек в $\mathbb{R}^k$, имеющих целочисленные координаты, определяет разбиение $\mathcal{D}_0$ пространства $\mathbb{R}^k$ на кубы со стороной, равной единице. В предварительных рассмотрениях мы будем считать, что эти кубы «замкнуты слева»: каждый куб $Q \in \mathcal{D}_0$ имеет вид

$$[s_1, s_1 + 1) \times [s_2, s_2 + 1) \times \ldots \times [s_k, s_k + 1),$$

где $s_i \in \mathbb{Z}^k$, $i = 1, \ldots, k$. Кроме того, внутренность такого куба совпадает с некоторым шаром в метрике $|\cdot|_\infty$ радиуса $1/2$, центр которого расположен в точке $(s_1 + 1/2, s_2 + 1/2, \ldots, s_k + 1/2)$. Очевидно, $\mathbb{R}^k = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{D}_0} Q$.

Разбиение $\mathcal{D}_0$ определяет набор двоичных кубов

$$\mathcal{D}_n = 2^{-n}\mathcal{D}_0 = \{2^{-n}Q : Q \in \mathcal{D}_0\}$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$. (Здесь $\lambda Q = \{\lambda x : x \in Q\}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — произвольное положительное число.) Очевидно, каждый куб $Q \in \mathcal{D}_n$ имеет вид

$$\Big[\frac{s_1}{2^n}, \frac{s_1 + 1}{2^n}\Big) \times \Big[\frac{s_2}{2^n}, \frac{s_2 + 1}{2^n}\Big) \times \ldots \times \Big[\frac{s_k}{2^n}, \frac{s_k + 1}{2^n}\Big),$$

где $s_i \in \mathbb{Z}^k$, $i = 1, \ldots, k$. Внутренность этого куба совпадает с некоторым шаром в метрике $|\cdot|_\infty$ радиуса $1/2^{n+1}$, центр которого расположен в точке $\left(\frac{2s_1+1}{2^{n+1}}, \frac{2s_2+1}{2^{n+1}}, \ldots, \frac{2s_k+1}{2^{n+1}}\right)$. Очевидно, $\mathbb{R}^k = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{D}_n} Q$.

18.1. Определение. Кубы, входящие в разбиение $\mathcal{D}_n$ при некотором $n \in \mathbb{Z}$, называются *двоичными кубами*. Совокупность всех двоичных кубов обозначается символом $\mathcal{D}$.

Отметим, простейшие свойства двоичных кубов.

18.2. Свойство. 1) *Любой куб $Q \in \mathcal{D}_n$ содержится в некотором кубе $Q \in \mathcal{D}_{n-1}$.*

2) *Два различных двоичных куба из $\mathcal{D}$ либо не пересекаются, либо один содержится в другом.*

Доказательство. Заметим, что первое свойство достаточно доказать в одномерном случае, поскольку к нему сводится рассмотрение каждой фиксированной координаты. Если, например, в одномерном случае двоичный сегмент $Q \in \mathcal{D}_n$ имеет вид $\left[\frac{s}{2^n}, \frac{s+1}{2^n}\right)$, $\quad s \in \mathbb{Z}$, то

$$\left[\frac{s}{2^n}, \frac{s+1}{2^n}\right) \subset \left[\frac{r}{2^{n-1}}, \frac{r+1}{2^{n-1}}\right),$$

где $r \in \mathbb{Z}$ — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $r \le \frac{s}{2} < r+1$. Действительно, при таком выборе $\frac{r}{2^{n-1}} \le \frac{s}{2^n}$ и $\frac{s+1}{2^n} \le \frac{r+1}{2^{n-1}}$.

Чтобы доказать второе утверждение, рассмотрим два произвольных различных куба $Q, T \in \mathcal{D}$ и предположим для определенности, что $Q \in \mathcal{D}_n$, а $T \in \mathcal{D}_m$, $n \le m$. Если $n = m$, то кубы очевидно не пересекаются. В противном случае, по уже доказанному свойству куб $T \in \mathcal{D}_m$ содержится в некотором кубе $Q_1 \in \mathcal{D}_{m-1}$, $Q_1 \in \mathcal{D}_{m-1}$ — в некотором кубе $Q_2 \in \mathcal{D}_{m-2}$ и т. д. Продолжая этот процесс по индукции, получаем на $(m-n)$-ом шаге, что куб $T \in \mathcal{D}_m$ содержится в некотором кубе $Q_{m-n} \in \mathcal{D}_n$. Кубы $Q \in \mathcal{D}_n$ и $Q_{m-n} \in \mathcal{D}_n$ либо не пересекаются (тогда и данные кубы не пересекаются), либо совпадают (тогда $T \subset Q$).

18.3. Свойство. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Тогда для любого $n \ge n_0$, где $n_0 \in \mathbb{Z}$ — некоторое целое число, существует непустой набор $\mathcal{M}_n$ двоичных кубов, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $\mathcal{M}_n = \{Q \in \mathcal{D}_n : \overline{Q} \subset \Omega\}$;

2) *множество* $M_n = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{M}_n} Q \subset \Omega$ *борелевское;*

3) $M_n \subset M_{n+1}$;

4) $\bigcup\limits_{n \ge n_0} M_n = \Omega$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} |M_n| = |\Omega|$.

Доказательство. Поскольку Ω — открытое множество, то существует такое n_0, что, по крайней мере, один куб из $\mathcal{D}_{n_0}$ содержится в Ω.

Требуемый набор $\mathcal{M}_n$ двоичных кубов при $n \geq n_0$ определяется условием 1. Так как каждый куб — борелевское множество, то и множество M_n также борелевское. Очевидно, каждый куб $Q \in \mathcal{M}_n$ разбивается на 2^k равных кубов, входящих в разбиение $\mathcal{D}_{n+1}$, а следовательно, и в $\mathcal{M}_{n+1}$. Отсюда получаем третье свойство. Для доказательства четвертого свойства возьмем точку $x \in \Omega$. Заметим, что если $n \geq n_0$ — такое число, что $\frac{1}{2^n} < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, то двоичный куб из набора $\mathcal{D}_n$, которому принадлежит точка x, содержится в Ω вместе со своим замыканием и, следовательно, принадлежит набору $\mathcal{M}_n$. Последнее свойство вытекает из леммы 17.6.

19. Отображения, удовлетворяющие условию Липшица и $\mathcal{N}$-свойство Лузина

19.1. Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное множество. Отображение $f : A \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет *условию Липшица*, если

$$|f(x) - f(y)|_\infty \leq M|x - y|_\infty \tag{19.1}$$

для произвольных точек $x, y \in A$ и некоторой постоянной M (называемой *постоянной Липшица*), не зависящей от выбора точек. Отображение $f : A \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет *условию Липшица локально*, если для каждой точки $z \in A$ существуют окрестность U_z и постоянная M_z такие, что неравенство (19.1) выполняется для всех точек $x, y \in U_z$ с постоянной M_z вместо M.

19.2. Пример. 1) Всякое дифференцируемое на k-мерном сегменте Q отображение $f : Q \to \mathbb{R}^m$, имеющее ограниченные производные, удовлетворяет условию Липшица.

2) Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, имеющее непрерывные первые производные, удовлетворяет условию Липшица локально.

19.3. Задача. Доказать, что свойство отображения быть липшицевым не зависит от выбора нормы в арифметических пространствах.

19.4. Определение. Отображение $f : A \to \mathbb{R}^k$, определенное на измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^k$, обладает *$\mathcal{N}$-свойством Лузина*, если для любого множества $S \subset A$ нулевой меры имеем:

$$|S| = 0 \Longrightarrow |f(S)| = 0.$$

19.5. Теорема. ($\mathcal{N}$-свойство Лузина для липшицевых отображений). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$ — измеримое множество. Если $f : A \to \mathbb{R}^k$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица, то f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.*

Доказательство. Так как отображение f удовлетворяет условию Липшица, то существует постоянная M такая, что $|f(x) - f(y)|_\infty \leq M|x - y|_\infty$ для любых точек куба $x, y \in A$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как множество $S \subset A$ имеет нулевую меру, то по определению 17.13

существует не более чем счетная совокупность $\{Q_n = Q(a_n, r_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$, открытых k-мерных кубов такая, что $S \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ и $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |Q_n| < \varepsilon$. Имеем $|f(x) - f(y)|_\infty \leq M|x - y|_\infty$ для любых точек куба $x, y \in Q_n \cap A$. Следовательно, $f(Q_n \cap A) \subset Q(f(a_n), Mr_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что, с одной стороны,

$$f(S) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(Q_n \cap A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q(f(a_n), Mr_n),$$

а с другой

$$|f(S)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |Q(f(a_n), Mr_n)| \leq M^k \sum_{n\in\mathbb{N}} |Q_n| \leq M^k\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема доказана.

19.6. Следствие. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Если $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица локально, то f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.*

Доказательство. Исчерпаем открытое множество Ω последовательностью непустых ограниченных открытых множеств $\Omega_n \subset \Omega$, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. В качестве Ω_n можно взять, например, множество $\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}$ и $|x|_\infty < n\}$, которое будет непустым при $n \geq n_0$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ — некоторое число.

Фиксируем $n \geq n_0$. Для каждой точки $z \in \overline{\Omega}_n$ существует число $r_z > 0$ такое, что $Q(z, r_z) \subset \Omega$ и отображение $f : Q(z, r_z) \to \mathbb{R}^k$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица M_z. Совокупность кубов $\Delta = \{Q(z, r_z) : z \in \Omega\}$ образует открытое покрытие компактного множества $\overline{\Omega}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $Q_1, \ldots, Q_{l_n}$. По теореме 19.5 отображение $f : Q_m \to \mathbb{R}^k$ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина для любого

$m = 1, \ldots, l_n$. Следовательно, отображение $f : \Omega_n \to \mathbb{R}^k$ также обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина. Отсюда получаем, что и исходное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ также обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина: если $S \subset \Omega$ — множество меры нуль, то образ $f(S)$ имеет нулевую меру. Действительно, пересечение $S \cap \Omega_n$ имеет нулевую меру, следовательно, $f(S \cap \Omega_n)$ имеет нулевую меру. Поэтому $f(S) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f(S \cap \Omega_n)$ имеет нулевую меру.

19.7. Следствие. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{R}^k$ — отображение, имеющее непрерывные первые производные. Тогда f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 19.6, поскольку всякое отображение, имеющее непрерывные первые производные, удовлетворяет условию Липшица локально.

19.8. Теорема. (Свойство измеримости при непрерывных отображениях). 1) *Если $f : U \to \mathbb{R}^k$ — непрерывное отображение, определенное на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^k$, то образ $f(\Omega)$ произвольного открытого множества $\Omega \subset U$ является борелевским множеством.*

2) *Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$ — измеримое множество. Пусть еще $f : A \to \mathbb{R}^k$ — непрерывное отображение, обладающее $\mathcal{N}$-свойством Лузина. Тогда образ $f(B)$ измеримого множества $B \subset A$ измерим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset U$ — открытое множество. Положим $F_n = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}$ и $|x|_\infty \leq n\}$, $n \geq n_0$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ — такое число, что F_n — непустое множество. Тогда $F_{n_0} \subset F_{n_0+1} \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots \subset \Omega$, F_n — компактное множество при любом $n \geq n_0$, $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Отсюда $f(\Omega) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f(F_n)$. Заметим, что $f(F_n)$ — компактное, а, следовательно, и замкнутое множество для всех $n \in \mathbb{N}$, так что $f(\Omega)$ — борелевское множество.

Второе утверждение достаточно доказать для произвольного измеримого множества $B \subset A$ конечной меры, так как произвольное множество множество можно представить в виде $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B \cap Q(0, n))$. По следствию 17.10 существует борелевское множество $F_\delta \subset B$ такое, что

$|B \setminus F_\delta| = 0$ и при этом

$$F_\delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n,$$

где $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$ — возрастающая последовательность замкнутых ограниченных (а, следовательно, компактных) множеств. Таким образом, $B = F_\delta \cup S$, причем $|S| = 0$. Отсюда $f(B) = f(F_\delta) \cup f(S)$, причем $|f(S)| = 0$ в силу $\mathcal{N}$-свойства Лузина. Заметим, что $f(F_n)$ — компактное, а, следовательно, и замкнутое множество для всех $n \in \mathbb{N}$, так что

$$f(F_\delta) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$$

— борелевское множество. Следовательно, $f(B)$ — измеримое множество.

19.9. Следствие. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Пусть еще $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ — отображение, удовлетворяющее либо*

1) *условию Липшица локально,*

либо

2) *имеющее непрерывные первые производные.*

Тогда образ $f(B)$ измеримого множества $B \subset \Omega$ измерим.

Доказательство. Действительно, по следствиям 19.6 и 19.7 отображение f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.

20. Изменение меры при линейных преобразованиях

В этом разделе мы исследуем изменение меры при простейших преобразованиях пространства $\mathbb{R}^k$.

20.1. Свойство. *Мера Лебега инвариантна относительно параллельных переносов: если A — измеримое множество в $\mathbb{R}^k$, то для любого вектора $v \in \mathbb{R}^k$ множество $v + A = \{v + x \mid x \in A\}$ измеримо и $|v + A| = |A|$.*

Доказательство этого свойства приводится ниже.

20.2. Неизмеримые множества. Множество вида $S = r + \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{R}$, будем называть рациональным слоем. В каждом рациональном слое S выберем какую-нибудь точку $r_S \in [0, 1]$. Множество, состоящее из всех выбранных точек, неизмеримо по Лебегу.

Доказательство.

20.3. Свойство. *Если множество $A \subset \mathbb{R}^k$ измеримо относительно меры Лебега, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ множество $\lambda A = \{y = \lambda x : x \in A\}$ также измеримо по Лебегу и $|\lambda A| = \lambda^k |A|$.*

Доказательство. Свойства 20.1, 20.3 и формулируемые ниже свойства 20.5, 20.7 можно доказать одним и тем же способом. Покажем его на примере свойства 20.3.

Фиксируем число $\lambda > 0$. Отображение растяжения $\mathbb{R}^k \ni x \mapsto \lambda x$ обозначим символом f. Заметим, что образ $f(Q)$ куба Q при растяжении есть куб и его мера $|f(Q)|$ равна $\lambda^k|Q|$. Рассмотрим в качестве A произвольное открытое множество $G \subset \mathbb{R}^k$. По свойству 18.3 существует последовательность множеств $M_n \subset G$, состоящих из двоичных кубов $Q \in \mathcal{M}_n$ таких, что $\overline{Q} \subset G$, и $\bigcup\limits_{n \geq n_0} M_n = G$. Поэтому $f(M_n) = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{M}_n} f(Q)$ и, следовательно,

$$|f(M_n)| = \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} |f(Q)| = \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} \lambda^k |Q| = \lambda^k \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} |Q| = \lambda^k |M_n|.$$

Учитывая равенства $|G| = \lim\limits_{n\to\infty} |M_n|$ и $|f(G)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(M_n)|$, получаем $|f(G)| = \lambda^k |G|$. Таким образом, для открытых множеств свойство доказано.

Заметим, что растяжение является липшицевым отображением:

$$|f(x) - f(y)|_\infty = \lambda |x - y|_\infty.$$

Следовательно, по теореме 19.5 отображение f обладает $\mathcal{N}$- свойством Лузина.

Пусть теперь $A \subset \mathbb{R}^k$ — измеримое множество конечной меры. Тогда по следствию 17.10 существует борелевское множество $U_\sigma \supset A$ такое, что $|U_\sigma \setminus A| = 0$ и при этом

$$U_\sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n,$$

где $U_1 \supset U_2 \supset \ldots U_n \ldots$ — убывающая последовательность открытых множеств. Таким образом, $U_\sigma = A \cup S$, причем $|S| = 0$, так что $f(U_\sigma) = f(A) \cup f(S)$, причем $|f(S)| = 0$. Заметим, что

$$f(U_\sigma) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(U_n).$$

Поэтому $|f(U_\sigma)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(U_n)| = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda^k |U_n| = \lambda^k |U_\sigma|$. Окончательно получаем $|f(A)| = |f(A)| + |f(S)| = |f(U_\sigma)| = \lambda^k |U_\sigma| = \lambda^k |A|$.

Если $|A| = \infty$, то $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $A_n = A \cap Q(0,n)$. Поскольку $|A| = \lim\limits_{n\to\infty} |A_n|$ и $|f(A)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(A_n)| = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda^k |A_n|$, то $|f(A)| = \infty$.

20.4. Задача. Доказать, что мера Лебега куба $B(0,r) \subset \mathbb{R}^k$ равна $r^k |B(0,1)|$.

20.5. Свойство. *Пусть набор* $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *положительных чисел* $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, k$, *определяет линейное преобразование* $\Lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *по формуле* $\Lambda(x) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_k x_k)$. *Если множество* $A \subset \mathbb{R}^k$ *измеримо относительно меры Лебега, то множество* $\Lambda(A)$ *также измеримо по Лебегу и* $|\Lambda(A)| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k |A|$.

20.6. Изменение меры при линейных преобразованиях. Пусть $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — линейное отображение. Тогда искажение меры при этом отображении постоянно во всех точках:

$$\frac{|L(Q(a,r))|}{|Q(a,r)|} = \frac{|L(a) + L(Q(0,r))|}{|a + Q(0,r)|} = \frac{|L(Q(0,r))|}{|Q(0,r)|} = \frac{r^k |L(Q(0,1))|}{r^k |Q(0,1)|} = \frac{|L(Q(0,1))|}{|Q(0,1)|}.$$

Здесь в первом равенстве использовано свойство линейности отображения L, во втором — свойство 20.1, а третьем — свойство 20.3. Приведенные равенства мотивируют определение якобиана линейного отображения:

$$J(L) = \frac{|L(Q(0,1))|}{|Q(0,1)|}, \tag{20.1}$$

характеризующего величину изменения меры при линейном преобразовании.

20.7. Свойство. *Если* $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *— линейное преобразование, и множество* $A \subset \mathbb{R}^k$ *измеримо относительно меры Лебега, то множество* $L(A)$ *измеримо по Лебегу и* $|L(A)| = J(L) \cdot |A|$, *где* $J(L)$ *— постоянная из* (20.1). (*Ниже будет показано, что* $J(L) = |\det L|$.)

Доказательство свойства повторяет основные шаги доказательства свойства 20.3. Единственное принципиальное отличие состоит в том, что липшицевость отображения $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ вытекает из ограниченности оператора L: $|L(x)|_\infty \leq K|x|_\infty$, $x \in \mathbb{R}^k$. Следовательно, L обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.

Свойство 20.7 может быть доказано также по схеме доказательства леммы 21.7.

20.8. Следствие. *Если $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — ортогональный оператор, то $J(L) = 1$.*

Доказательство. По свойству 20.7 имеем $|L(A)| = J(L)|A|$ для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^k$. Возьмем в качестве множества A шар $B(0,1)$ (в евклидовой метрике). Тогда $L(A) = A$ и поэтому $|L(A)| = |A|$. Следовательно, $|A| = J(L)|A|$, откуда $J(L) = 1$.

20.9. Алгебраическая лемма. *Пусть $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — линейный невырожденный оператор. Тогда существуют ортонормированные базисы $\{u_1, \ldots, u_k\}$ и $\{v_1, \ldots, v_k\}$ в $\mathbb{R}^k$, и неотрицательные числа $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ такие, что $L(u_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, k$. Векторы $\{u_1, \ldots, u_k\}$ являются собственными векторами оператора L^*L, а $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_k^2$ — его собственными числами. При этом $|\det L| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k$.*

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму

$$S(x, y) = (L(x), L(y))$$

и заметим, что $S(x, y) = \frac{1}{2}[S(x+y, x+y) - S(x, x) - S(y, y)]$. Положительно определенная форма $S(x, x) = (L^*L(x), x)$ приводится к главным осям, т. е. существует ортонормированный базис $\{u_1, \ldots, u_k\}$, в котором для вектора $x = x_1 u_1 + \ldots + x_k u_k$ имеем

$$S(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_k x_k^2.$$

Известно,что векторы $\{u_1, \ldots, u_k\}$ являются собственными векторами симметрического оператора L^*L, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$ — его собственными числами. Положим $\lambda_i = \sqrt{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда $S(x, y) = \lambda_1^2 x_1 y_1 + \ldots + \lambda_k^2 x_k y_k$, откуда вытекает, что векторы $L(u_i)$, $i = 1, \ldots, k$, ортогональны и $\|L(u_i)\| = \sqrt{(L(u_i), L(u_i))} = \sqrt{\lambda_i^2} = \lambda_i$. Положим $v_i = \frac{1}{\lambda_i} L(u_i)$. Набор векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ образует ортонормированный базис и $L(u_i) = \lambda_i v_i$. Для окончания доказательства заметим, что $|\det L|^2 = \det L^*L = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k$.

20.10. Следствие. *Если* $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *— произвольный линейный оператор, то* $J(L) = |\det L|$. *Следовательно,* $|L(A)| = |\det L| \cdot |A|$ *для любого измеримого множества* $A \subset \mathbb{R}^k$.

Доказательство. Утверждение очевидно, если $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — вырожденный оператор, так как образ $L(\mathbb{R}^k)$ в этом случае представляет собой подпространство размерности меньшей k, мера которого равна нулю. Если же оператор L не вырожден, то, в соответствии с леммой 20.9, действие оператора L в стандартном базисе $e_1, \dots, e_n$ состоит из последовательного выполнения ортогонального преобразования (это есть переход от стандартного базиса к базису $\{u_1, \dots, u_k\}$), затем неоднородного растяжения, описанного в п. 20.5, а затем еще одного ортогонального преобразования (это есть переход от базиса $\{v_1, \dots, v_k\}$ к стандартному базису). По следствию 20.8 ортогональные преобразования меру не изменяют, поэтому все изменение меры сосредоточено в неоднородном растяжении: $|L(A)| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k |A|$. Остается лишь заметить, что $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k = |\det L|$ (см. лемму 20.9).

20.11. Определение. Композиция конечного числа переносов и ортогональных преобразований называется *движением* пространства $\mathbb{R}^k$.

20.12. Задача. Доказать, что мера Лебега измеримого множества не изменяется при движениях пространства $\mathbb{R}^k$.

21. Формула замены переменной

21.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Всякое отображение $f : U \to \mathbb{R}^k$ имеет локальную характеристику изменения меры. В качестве таковой мы рассматриваем предел

$$\lim_{r \to 0} \frac{|f(Q(x,r))|}{|Q(x,r)|} \stackrel{\text{def}}{=} J(x, f), \qquad (21.1)$$

если только он существует. (Ниже (пример 23.20) будет доказано, что этот предел существует всегда, по крайней мере, если f — инъективное непрерывное отображение.) В этом разделе мы ограничимся классическим случаем, предполагая, что $f : U \to V$ — гомеоморфизм двух открытых множеств, имеющий непрерывные первые производные. Раздел состоит из трех частей. В первой части мы покажем, что локальная характеристика изменения меры $J(x, f)$ выражается через дифференциал отображения f в точке $x \in U$:

$$J(x, f) = |\det df(x)|. \tag{21.2}$$

Во второй части мы докажем основную лемму об изменении меры:

$$|f(A)| = \int\limits_A |\det df(x)|\, dx. \tag{21.3}$$

Эта формула обобщает следствие 20.10. Из формулы (21.3) видно также, что для ее справедливости необходимо выполнение $\mathcal{N}$-свойства Лузина. В самом деле, если $|f(A)| > 0$ для множества $|A| = 0$, то формула (21.3) не верна, так как ее правая часть в этом случае равна нулю.

Последняя часть раздела будет посвящена выводу формулы замены переменной в интеграле Лебега.

I. Возможность локального приближения отображения линейным оператором позволяет легко найти локальную характеристику изменения меры и выразить ее через алгебраические свойства этого оператора.

21.2. Лемма. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ —- собственное линейное подпространство, а A — измеримое множество, диаметр которого не превосходит C и содержится в δ-окрестности множества $b + \Gamma$ (измерение производится в евклидовой метрике). Тогда*

$$|A| \le 2C^{k-1}\delta.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что множество A содержится в образе k-мерного сегмента T, $k-1$ сторона которого равна C, а k-я сторона равна 2δ, при некотором движении k-мерного сегмента. Так как движение не изменяет меру множества (задача 20.12), то $|A| \le |T| = 2C^{k-1}\delta$.

21.3. Лемма о локальном искажении меры. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{R}^k$ — гомеоморфизм, дифференцируемый в некоторой точке $x \in U$. Тогда для локального искажения в точке $x \in U$ справедливо следующее равенство:*

$$J(x, f) = \lim_{r \to 0} \frac{|f(Q(x,r))|}{|Q(x,r)|} = J(df(x)) = |\det df(x)|. \tag{21.4}$$

Предел (21.4) *не зависит от того, рассматриваются открытые или замкнутые кубы, или кубы с частью границы.*

Доказательство. Чтобы доказать (21.4), введем отображение $g(y) = f(x) + df(x)(y - x)$. Оно является композицией линейного отображения $df(x)$ и сдвигов. Поэтому его локальная характеристика искажения $J(x, g)$ равна $|\det df(x)|$. Мы докажем, что локальные характеристики $J(x, g)$ и $J(x, f)$ совпадают. Поскольку $d(f - g)(x) = 0$, для разности $f(y) - g(y)$ имеем следующую оценку на кубе $Q(x, r) \subset U$:

$$|f(y) - g(y)| = o(|y - x|) \quad \text{при } y \to x. \tag{21.5}$$

Если дифференциал $df(x)$ вырожден, то образ $f(Q(x, r))$ лежит в $o(r)$ окрестности множества $f(x) + df(x)(\mathbb{R}^k)$ и имеет диаметр не больше Cr, где C — некоторая постоянная. Отсюда по лемме 21.2 $|f(Q(x, r))| = o(r^k)$ и (21.4) в этом случае доказано.

Если дифференциал $df(x)$ не вырожден, то для достаточно малых r имеем

$$(f(x)+df(x)(Q(x, r)))\setminus\Omega(r) \subset f(Q(x, r)) \subset f(x)+df(x)(Q(x, r))\cup\Omega(r),$$

где $\Omega(r)$ — объединение образов k-мерного сегмента, имеющего размеры $O(r)$ по $k-1$ стороне и $o(r)$ по одной из сторон, при $2k$ движениях пространства $\mathbb{R}^k$. Отсюда $\Omega(r) = o(r^k)$. Следовательно, получаем

$$|df(x)(Q(x, r))| - |\Omega(r)| \leq |f(Q(x, r))| \leq |df(x)(Q(x, r))| + |\Omega(r)|.$$

Вспоминая, что $|df(x)(Q(x, r))| = |\det df(x)||Q(x, r)|$, имеем

$$|\det df(x)| - \frac{|\Omega(r)|}{|Q(x, r)|} \leq \frac{|f(Q(x, r))|}{|Q(x, r)|} \leq |\det df(x)| + \frac{|\Omega(r)|}{|Q(x, r)|}.$$

Поскольку $\frac{|\Omega(r)|}{|Q(x,r)|} = o(1)$ при $r \to 0$, соотношение (21.4) доказано. Кроме того, в силу включения $\partial Q(x, r) \subset \Omega(r)$ и свойства $|\partial Q(x, r)| = 0$ имеем $\frac{|\Omega(r)|}{|Q(x,r)|} = o(1)$ при $r \to 0$ независимо от того включена ли в куб $Q(x, r)$ его граница (или какая-либо ее часть) или нет.

21.4. Следствие. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{R}^k$ — отображение, имеющее непрерывные первые производные. Тогда для любой точки $x \in U$ справедливо равенство* (21.4) *независимо от того, рассматриваются открытые или замкнутые кубы, или кубы с частью границы.*

Утверждение леммы справедливо также в точках дифференцируемости любого гомеоморфного отображения $f : U \to \mathbb{R}^k$.

Доказательство. Чтобы доказать (21.4), запишем $f(y) = f(x) + df(x)(y - x) + o(y - x)$. Если дифференциал $df(x)$ вырожден, то $f(Q(x, r)) \subset \Pi(r)$, где $\Pi(r)$ — образ k-мерного сегмента при движении пространства $\mathbb{R}^k$, имеющего размеры $O(r)$ по $k-1$ стороне и $o(r)$ по одной из сторон. Отсюда $|\Pi(r)| = o(r^k)$ и (21.4) в этом случае доказано.

Если дифференциал $df(x)$ не вырожден, то по теореме об обратной функции в некоторой окрестности точки x отображение f является диффеоморфизмом, и тогда результат вытекает из леммы 21.3.

21.5. Следствие. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{R}^k$ — гомеоморфизм, имеющий непрерывные первые производные. Тогда для любого компактного множества $F \subset U$ предел*

$$\lim_{r \to 0} \frac{|f(Q(x, r))|}{|Q(x, r)|} = |\det df(x)| \tag{21.6}$$

равномерен относительно $x \in F$ независимо от того, рассматриваются открытые или замкнутые кубы, или кубы с частью границы.

Доказательство. Чтобы доказать (21.6), введем отображение $g(y) = f(x) + df(x)(y - x)$. Оно является композицией линейного отображения $df(x)$ и сдвигов. Поэтому его локальная характеристика искажения $J(x, g)$ равна $|\det df(x)|$. По следствию 21.4 локальные характеристики $J(x, g)$ и $J(x, f)$ совпадают. По теореме о среднем имеем следующую оценку для разности $f(y) - g(y)$ на кубе $Q(x, r) \subset U$:

$$|f(y) - g(y)| \le \sup_{\xi \in Q(x,r)} \|df(\xi) - df(x)\| |y - x| = o(1)|y - x|,$$

где величина $o(1)$ равномерная относительно $x \in F$. Далее мы рассуждаем так же, как и после формулы (21.5). С учетом равномерной малости величины $o(1)$ на множестве F получаем доказательство следствия 21.5.

II. В этой части мы изучим глобальное изменение меры при отображении f, если известно поведение его локальной характеристики. Основным приемом является здесь «суммирование» локальных искажений меры.

21.6. Лемма. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^k$ *— открытое множество,* $Z \subset U$ *— множество нулевой меры, а* $g : U \to \mathbb{R}$ *— непрерывная на* $U \setminus Z$ *функция. Тогда*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} g(y)\,dy = g(x) \tag{21.7}$$

для любой точки $x \in U \setminus Z$.

Если $g : U \to \mathbb{R}$ *— непрерывная на* U *функция, то сходимость в* (21.7) *будет равномерной на всяком компактном множестве* $F \subset U$.

Доказательство. Действительно, если $x \in U \setminus Z$ — точка непрерывности функции g, то $|g(y) - g(x)| = o(1)$ при $U \setminus Z \ni y \to x$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} g(y)\,dy - g(x)\right| \\
&\qquad = \left|\frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} (g(y) - g(x))\,dy\right| \\
&\qquad \le \frac{1}{|Q(x,r)\setminus Z|} \int\limits_{Q(x,r)\setminus Z} |g(y) - g(x)|\,dy = o(1) \qquad (21.8)
\end{aligned}$$

при $U \setminus Z \ni y \to x$.

Если теперь функция $g : U \to \mathbb{R}$ — непрерывна на U, то будет равномерно непрерывной на компактном подмножестве $F \subset U$, и, следовательно, $o(1)$ в (21.8) будет равномерной относительно $x \in F$.

21.7. Основная лемма об искажении меры. *Пусть* $U, V \subset \mathbb{R}^k$ *— открытые множества. Пусть еще* $f : U \to V$ *— гомеоморфное отображение, непрерывно дифференцируемое на* U. *Тогда образ измеримого множества измерим и для любого измеримого множества* $A \subset U$ *справедливо равенство* (21.3):

$$\int\limits_A |\det df(x)|\,dx = |f(A)|.$$

Если $S \subset V$ *— множество нулевой меры, то* $\det df(x) = 0$ *почти всюду на множестве* $f^{-1}(S)$.

Доказательство. Измеримость образа измеримого множества вытекает из следствия 19.9.

Докажем справедливость равенства (21.3) для всякого открытого ограниченного множества $\Omega \subset U$ конечной меры такого, что $\overline{\Omega} \subset U$. В каждой точке $x \in \Omega$ одновременно имеем равномерный по $x \in \overline{\Omega}$ предел (21.6):

$$\lim_{r\to 0} \frac{|f(Q(x,r))|}{|Q(x,r)|} = |\det df(x)|,$$

и вытекающий из (21.7) равномерный по $x \in \overline{\Omega}$ предел

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |\det df(y)|\, dy = |\det df(x)|.$$

Отсюда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $r_0 > 0$ такое, что в каждой точке $x \in \Omega$ имеем

$$\left| \frac{|f(Q(x,r))|}{|Q(x,r)|} - \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |\det df(y)|\, dy \right| \leq \frac{1}{m} \tag{21.9}$$

для всех $r \in (0, r_0)$.

По следствию 18.3 для всех $n \geq n_0$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ — некоторое число, существует непустой набор $\mathcal{M}_n$ двоичных кубов, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\mathcal{M}_n = \{Q \in \mathcal{D}_n : \overline{Q} \subset \Omega\}$;

2) множество $M_n = \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{M}_n} Q \subset \Omega$ борелевское;

3) $M_n \subset M_{n+1}$;

4) $\bigcup\limits_{n \geq n_0} M_n = \Omega$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} |M_n| = |\Omega|$.

В силу вышесказанного оценка (21.9) выполняется для всех кубов $Q \in \mathcal{M}_n$, если только $\frac{1}{2^{n+1}} < r_0$.

Из формулы (21.9) для любого куба $Q \in \mathcal{M}_n$ при $\frac{1}{2^{n+1}} < r_0$ имеем

$$-\frac{|Q|}{m} \leq |f(Q)| - \int\limits_{Q} |\det df(y)|\, dy \leq \frac{|Q|}{m}. \tag{21.10}$$

Суммируя формулу (21.10) по всем кубам $Q \in \mathcal{M}_n$, получаем

$$-\frac{|\Omega|}{m} \leq -\frac{|M_n|}{m} \leq |f(M_n)| - \int\limits_{M_n} |\det df(y)|\, dy \leq \frac{|M_n|}{m} \leq \frac{|\Omega|}{m}. \tag{21.11}$$

Формула (21.11) справедлива для всех достаточно больших n, поэтому в ней возможен предельный переход при $n \to \infty$:

$$-\frac{|\Omega|}{m} \le |f(\Omega)| - \int\limits_{\Omega} |\det df(y)|\, dy \le \frac{|\Omega|}{m}. \qquad (21.12)$$

Формула (21.12) справедлива для всех $m \in \mathbb{N}$, поэтому соотношение (21.3) для открытого множества указанного выше вида доказана.

Заметим, что произвольное открытое множество $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, где $\Omega_n = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}$ и $|x|_\infty < n\}$. Поскольку для открытого множества Ω_n формула (21.3) уже доказана, то она распространяется и на множество Ω, так как $|f(\Omega)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(\Omega_n)|$, а предельный переход в интеграле возможен по теореме Беппо Леви.

Поскольку по следствию 17.10 всякое измеримое множество $A \subset U$ содержится в некотором борелевском Ω_σ, причем $\Omega_\sigma = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, где $\{\Omega_n \subset U\}$, $n \in \mathbb{N}$, — убывающая последовательность открытых множеств, а множество $S = \Omega_\sigma \setminus A$ имеет нулевую меру, то равенство (21.3) можно распространить на произвольные измеримые множества $A \subset U$. Действительно, $\Omega_\sigma = A \cup S$. Поэтому $|f(\Omega_\sigma)| = |f(A)|$, так как отображение обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина (см. следствие 19.7).

Если $S \subset V$ — множество нулевой меры, то по лемме 17.10 существует борелевское множество $U_\sigma \supset S$ такое, что $|U_\sigma| = 0$. При этом

$$U_\sigma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

где $U_1 \supset U_2 \supset \ldots U_n \ldots$ — убывающая последовательность открытых множеств. Для любого U_n имеем

$$\int\limits_{f^{-1}(U_n)} |\det df(x)|\, dx = |U_n|.$$

Так как $|U_n| \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\int\limits_{f^{-1}(U_\sigma)} |\det df(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{f^{-1}(U_n)} |\det df(x)|\, dx = 0.$$

Поэтому $\det df(x) = 0$ почти всюду на множестве $f^{-1}(U_\sigma)$, а следовательно, и на множестве $f^{-1}(S)$.

III. В этом разделе мы получаем формулу замены переменной в интеграле Лебега.

21.8. Теорема. *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^k$ — открытые множества, а $f : U \to V$ — гомеоморфное отображение, непрерывно дифференцируемое на множестве U.*

Функция $u : V \to \mathbb{E}$ интегрируема на V тогда и только тогда, когда функция $u(f(x))|\det df(x)|$ интегрируема на U, при этом

$$\int\limits_U u(f(x))|\det df(x)|\,dx = \int\limits_V u(y)\,dy. \tag{21.13}$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{L}_1(V)$ и последовательность $\varphi_n \in \mathrm{Step}(U;\mathbb{E})$ такова, что $\|u - \varphi_n\| \to 0$ и $\varphi_n(x) \to u(x)$ при $n \to \infty$ за исключением некоторого множества $S \subset V$ нулевой меры. Можно считать, что все дизъюнктные сегменты, на которых сосредоточена ступенчатая функция $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, являются открытыми. Из (21.3) вытекает

$$\int\limits_V \chi_P(f(x))|\det df(x)|\,dx = \int\limits_{f^{-1}(P)} |\det df(x)|\,dx = |P| = \int\limits_U \chi_P(y)\,dy \tag{21.14}$$

для любого открытого множества (в частности, открытого сегмента) $P \subset U$. Следовательно, формула (21.13) справедлива для любой ступенчатой функции $\varphi_n \in \mathrm{Step}(V;\mathbb{E})$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\int\limits_U \varphi_n(f(x))|\det df(x)|\,dx = \int\limits_V \varphi_n(y)\,dy \tag{21.15}$$

(здесь $\mathbb{E}$ может быть произвольным банаховым пространством). Из (21.15) имеем равенство

$$\int\limits_U |\varphi_n(f(x)) - \varphi_m(f(x))||\det df(x)|\,dx = \int\limits_V |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|\,dy,$$

из которого вытекает, что последовательность $\varphi_n(f(x))|J(x,f)|$ является фундаментальной в $\mathcal{L}_1(U)$. Так как $|\det df(x)| = 0$ для почти всех точек $x \in f^{-1}(S)$, то

$$\varphi_n(f(x))|\det df(x)| \to u(f(x))|\det df(x)|$$

в почти всех точках $x \in U$ при $n \to \infty$. Таким образом, предел последовательности $\{\varphi_n(f(x))|\det df(x)|\}$ в $\mathcal{L}_1(U)$ равен $u(f(x))|\det df(x)|$ почти всюду.

Переходя в (21.15) к пределу при $n \to \infty$, получаем равенство (21.13).

Пусть теперь функция $u(f(x))|\det df(x)|$ интегрируема на U. Пусть $Z = \{x \in U : \det df(x) = 0\}$. Тогда на открытом множестве $U \setminus Z$ отображение $f : U \setminus Z \to V$ является диффеоморфизмом. Следовательно, отображение $f^{-1} : V \setminus f(Z) \to U \setminus Z$ является гомеоморфизмом с непрерывными первыми производными. Применим к нему уже доказанную формулу замены переменной:

$$\int\limits_U u(f(x))|\det df(x)|\,dx = \int\limits_{U\setminus Z} u(f(x))|\det df(x)|\,dx =$$

$$\int\limits_{V\setminus f(Z)} u(f(f^{-1}(y)))|\det df(f^{-1}(y))||\det df^{-1}(y)|\,dy = \int\limits_V u(y)\,dy,$$

поскольку $|f(Z)| = 0$ и $|\det df(f^{-1}(y))||\det df^{-1}(y)| \equiv 1$ на $V \setminus f(Z)$.

21.9. Теорема. *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^k$ — открытые множества, а $f : U \to V$ — гомеоморфное отображение, непрерывно дифференцируемое на множестве U.*

Функция $u : V \to [0, \infty]$ измерима на V тогда и только тогда, когда функция $u(f(x))J(x, f)$ измерима на U, при этом

$$\int\limits_U u(f(x))|\det df(x)|\,dx = \int\limits_V u(y)\,dy. \qquad (21.16)$$

Таким образом, обе части равенства (21.16) *либо одновременно конечны, либо одновременно бесконечны.*

Доказательство. Пусть u — измеримая функция. Достаточно рассмотреть случай ограниченного множества V (общий случай получается стандартным предельным переходом). По лемме 15.12 о срезке функция $u_m = \mathrm{cut}(m; u)$ интегрируема $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, $\lim\limits_{m\to\infty} u_m(x) = u(x)$. По формуле (21.13) справедливо равенство

$$\int\limits_U u_m(f(x))|\det df(x)|\,dx = \int\limits_V u_m(y)\,dy.$$

Переходя по теореме Беппо Леви к пределу при $m \to \infty$, получаем формулу (21.16).

Если функция $u(f(x))J(x,f)$ измерима на U, то возьмем исчерпание $\Omega_n \subset U$, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ — компакт для всех $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = U$. Тогда функция $u_m(f(x))|\det df(x)|$ измерима (проверить!) и ограничена на ограниченном открытом множестве Ω_n и поэтому к нему применима формула (21.13):

$$\int\limits_{\Omega_n} u_m(f(x))|\det df(x)|\,dx = \int\limits_{f(\Omega_n)} u_m(y)\,dy.$$

Переходя в этой формуле к пределе сначала при $m \to \infty$, а потом при $n \to \infty$, получим требуемый результат.

21.10. Приложение. Интеграл Пуассона $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Доказательство. Обозначим

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx.$$

Тогда

$$J^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy. \tag{21.17}$$

Так как x и y — независимые переменные, то (21.17) можно представить как двойной интеграл, а затем, применяя теорему Тоннели, получить

$$J^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

При полярной замене координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2}\,dr^2 = \pi.$$

Таким образом,

$$J^2 = \pi,$$

или

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

21.11. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Доказательство. Действительно,

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}.$$

22. Теорема Витали

22.1. Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное множество, а $\Delta = \{Q_\xi : \xi \in \Xi\}$ — некоторая система невырожденных замкнутых кубов. Если для всякой точки $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой куб $Q_\xi \in \Delta$, что $x \in Q_\xi$ и $\mathrm{rad}(Q_\xi) < \varepsilon$, то мы будем говорить, что *система Δ покрывает множество E в смысле Витали.*

22.2. Теорема Д. Витали. *Если множество $E \subset \mathbb{R}^k$ покрыто в смысле Витали системой $\Delta = \{Q_\xi : \xi \in \Xi\}$ замкнутых кубов, то из Δ можно выделить не более чем счетную дизъюнктную систему кубов $\{Q_m\} \subset \Delta$ такую, что дополнение*

$$E \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$$

имеет лебегову меру нуль.

Доказательство. 1) Вначале рассмотрим случай ограниченного множества E. Возьмем какой-нибудь открытый куб U, содержащий множество E, и удалим из Δ все замкнутые кубы, не содержащиеся целиком в U. Оставшиеся кубы также покрывают E в смысле Витали, поэтому с самого начала можно считать, что все кубы из Δ содержатся в U.

Пусть $k_1 = \sup\{\mathrm{rad}(Q) : Q \in \Delta\}$, а $Q_1 \in \Delta$ — произвольный куб такой, что

$$\mathrm{rad}(Q_1) > 0.75k_1.$$

Если $Q_1 \supset E$, то доказательство закончено. В противном случае выберем по индукции замкнутые кубы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots \in \Delta$. Если $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in \Delta$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, $i \neq j$, уже выбраны и $E \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{n} Q_m \neq \emptyset$, то положим

$$F_n = \bigcup_{m=1}^{n} Q_m, \quad G_n = U \setminus F_n,$$

и рассмотрим все те кубы системы Δ, которые содержатся в открытом множестве G_n. Они покрывают множество $E \setminus F_n$ в смысле Витали. Пусть k_{n+1} — точная верхняя грань радиусов таких кубов, и обозначим через Q_{n+1} тот из них, для которого

$$\mathrm{rad}(Q_{n+1}) > 0.75 k_{n+1}.$$

Ясно, что $Q_{n+1} \cap Q_j = \emptyset$, $j = 1, \ldots, n$. Этот процесс или обрывается через конечное число шагов, или приводит к последовательности

$$Q_1 = Q_1(x_1, r_1),\ Q_2(x_2, r_2), \ldots, Q_m(x_m, r_m), \ldots \in \Delta$$

попарно непересекающихся кубов. Покажем, что лебегова мера множества $E \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Q_m$ равна нулю.

Пусть $D_m = Q_m(x_m, 4r_m)$, $m \in \mathbb{N}$. Из свойства счетной аддитивности меры (см. 17.4) и очевидного равенства $|D_m| = 4^k |Q_m|$ имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} |D_m| = 4^k \sum_{m=1}^{\infty} |Q_m| \leq 4^k |U|. \tag{22.1}$$

Так как ряд справа сходится, то

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{m=i}^{\infty} |D_m| = 0.$$

Поэтому достаточно доказать, что для всех $i \in N$ будет

$$E \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \subset \bigcup_{m=i}^{\infty} D_m. \tag{22.2}$$

Фиксируем $i \in N$. Пусть $x \in E \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Q_m = E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Тогда $x \notin F_i$ и (поскольку $G_i = U \setminus F_i$ открыто) существует $Q \in \Delta$ такой, что

$x \in Q \subset G_i$. Не может быть такого, чтобы $Q \cap F_n = \emptyset$ при всех $n \in \mathbb{N}$, так как в этом случае

$$\operatorname{rad}(Q) \leq k_{n+1} < \frac{4}{3}\operatorname{rad}(Q_{n+1}),$$

что невозможно, так как из (22.1) имеем $\operatorname{rad}(Q_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $Q \cap F_m \neq \emptyset$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$, и пусть n_0 — наименьшее из чисел, удовлетворяющих этому условию. Так как $Q \cap F_i = \emptyset$ и $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$, то ясно, что $n_0 > i$. Из определения n_0 вытекает, что

$$Q \cap F_{n_0-1} = \emptyset.$$

Отсюда, учитывая $Q \cap F_{n_0} \neq \emptyset$ и $F_{n_0} = F_{n_0-1} \cup Q_{n_0}$, имеем, во-первых,

$$Q \cap Q_{n_0} \neq \emptyset,$$

а, во-вторых, $Q \subset G_{n_0-1}$ и, следовательно,

$$\operatorname{rad}(Q) \leq k_{n_0} < \frac{4}{3}\operatorname{rad}(Q_{n_0}).$$

Отсюда вытекает, что $Q \subset D_{n_0}$ и, тем более,

$$Q \subset \bigcup_{m=i}^{\infty} D_m.$$

Значит, из условия $x \in E \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Q_m$ вытекает $x \in \bigcup\limits_{m=i}^{\infty} D_m$ и теорема в этом случае доказана.

Общий случай сводится к предыдущему. Действительно, рассмотрим непустые ограниченные множества

$$E_n = \{x \in E : n-1 < |x|_\infty < n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $\left| E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \right| = 0$. Выделим теперь из покрытия Витали Δ лишь те кубы, которые содержатся в открытом множестве $\{x \in \mathbb{R}^k : n-1 < |x|_\infty < n\}$ и обозначим полученную систему кубов символом Δ_n . Система кубов Δ_n образует покрытие Витали ограниченного множества E_n и по уже доказанному случаю из нее можно выделить не более чем счетную дизъюнктную систему кубов $\{Q_{n,m}\}$, $m \in \mathbb{N}$, такую, что дополнение

$$E_n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_{n,m}$$

имеет нулевую меру. Легко проверить, что система кубов $\{Q_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, обладает требуемыми свойствами: она дизъюнктна и дополнение

$$E \setminus \bigcup_{n,m=1}^{\infty} Q_{n,m}$$

имеет нулевую меру.

22.3. Следствие. *Пусть $\{Q_\alpha\}$ — покрытие Витали множества $E \subset \mathbb{R}^k$ открытыми кубами. Тогда найдется последовательность дизъюнктных открытых кубов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots$, $Q_k \in \{Q_\alpha\}$, такая, что*

$$\left| E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right| = 0.$$

Доказательство. Заметим, что совокупность $\{\overline{Q}_\alpha\}$, состоящая из замыканий кубов данного покрытия, также образует покрытие Витали множества E. Тогда по теореме Витали существует последовательность попарно непересекающихся кубов $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_k, \ldots$, такая, что

$$\left| E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{Q}_k \right| = 0.$$

Поскольку $|\partial Q_k| = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то имеем также

$$\left| E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right| = 0.$$

22.4. Следствие. *Если множество $E \subset \mathbb{R}^k$ покрыто в смысле Витали системой $\Delta = \{Q_\xi : \xi \in \Xi\}$ замкнутых (или открытых) кубов, то из Δ можно выделить не более чем счетную дизъюнктную систему кубов $\{Q_m = Q_m(x_m, r_m)\} \subset \Delta$ такую, что*

$$E \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Q_m(x_m, 4r_m). \tag{22.3}$$

Если множество E ограничено, то систему кубов можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} |Q_m| < \infty.$$

Если множество E открыто, то систему кубов можно выбрать так, чтобы

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Q_m(x_m, 4r_m). \tag{22.4}$$

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы Витали и соотношения (22.2). Для доказательства (22.4) необходимо в самом начале доказательства теоремы Витали оставить лишь такие кубы $Q_\xi(x_\xi, r_\xi)$ данного покрытия, что $Q_\xi(x_\xi, 4r_\xi) \subset E$. Тогда вместе с (22.3) мы будем иметь и обратное включение.

23. Теорема о дифференцировании аддитивной функции множества

Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$. Обозначим символом $\mathcal{O}(D)$ некоторую систему открытых множеств из D, обладающую следующими свойствами:

1) если Q — открытый куб, содержащийся в D, то $Q \in \mathcal{O}(D)$;

2) если $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}(D)$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{O}(D)$.

Среди систем открытых множеств, обладающих описанными свойствами есть минимальная, содержащая лишь объединения конечных совокупностей открытых кубов $Q \subset D$, и максимальная, содержащая все открытые множества из D.

23.1. Определение. Отображение $\Phi : \mathcal{O}(D) \to [0, \infty]$ называется *квазиаддитивной* функцией множества, если

1) для всякой точки $x \in D$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial D)$, такое, что $0 \le \Phi(Q(x, \delta)) < \infty$;

2) для всякого конечного дизъюнктного набора $\{U_i\} \subset U$, $U_i, U \in \mathcal{O}(D)$, $i = 1, \dots, n$, открытых множеств справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(U_i) \le \Phi(U).$$

Очевидно, неравенство во втором условии этого определения можно распространить на счетную совокупность попарно непересекающихся открытых множеств из $\mathcal{O}(D)$, так что конечно квазиаддитивная функция множества является также и *счетно-квазиаддитивной*.

Если вместо второго условия предположить, что для всякого конечного набора $U_i \in \mathcal{O}(D)$, $i = 1, 2, \dots, n$, попарно непересекающихся открытых множеств имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(U_i) = \Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\Big),$$

то такая функция множества называется *конечно-аддитивной*. Если равенство в этом условии можно распространить на счетную совокупность попарно непересекающихся открытых множеств из $\mathcal{O}(D)$, то такую функцию множества будем называть *счетно-аддитивной*.

Отображение Φ, определенное на открытых подмножествах из $\mathcal{O}(D)$ и принимающее неотрицательные значения, называется *монотонной* функцией множества, если $\Phi(U_1) \le \Phi(U_2)$ при условии, что $U_1 \subset U_2$, $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(D)$. Очевидно, всякая монотонная аддитивная функция множества является квазиаддитивной.

Если Φ определена на максимальной системе открытых множеств, то будем говорить, что Φ *определена на открытых подмножествах открытого множества* D.

23.2. Пример. Пусть $D \subset \mathbb{R}$ — открытое множество на прямой, а $f : D \to \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая функция. Для одномерного сегмента $Q = (\alpha, \beta) \subset D$ положим

$$\Phi(Q) = f(\beta) - f(\alpha).$$

На объединении $Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_l$ конечного числа дизъюнктных одномерных сегментов положим $\Phi(Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_l) = \Phi(Q_1) + \Phi(Q_2) + \ldots + \Phi(Q_l)$. Получается функция множества, определенная на объединениях конечного числа дизъюнктных одномерных сегментов, и очевидно квазиаддитивная (проверить!).

23.3. Пример. Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $g \in L_1(D)$ — неотрицательная функция. Для открытого множества $U \subset D$ положим

$$\Phi(U) = \int\limits_U g(x)\, dx.$$

Функция Φ определена на открытых множества $U \subset D$ и является монотонной счетно-аддитивной (см. теорему 17.3).

23.4. Пример. Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $f : D \to \mathbb{R}^k$ — инъективное непрерывное отображение. Тогда по теореме 19.8 для любого открытого множества $U \subset D$ образ $f(U)$ является борелевским множеством и поэтому определена функция множества Φ:

$$U \mapsto |f(U)|.$$

Функция Φ определена на открытых множества $U \subset D$ и является очевидно монотонной счетно-аддитивной (см. теорему 17.3).

Верхняя и *нижняя* производные квазиаддитивной функции множества Φ, заданной на открытых множествах из $\mathcal{O}(D)$, определяются следующим образом:

$$\overline{\Phi}'(x) = \lim_{r\to 0} \sup_{\delta<r} \frac{\Phi(Q_\delta)}{|Q_\delta|} \quad \text{и} \quad \underline{\Phi}'(x) = \lim_{r\to 0} \inf_{\delta<r} \frac{\Phi(Q_\delta)}{|Q_\delta|},$$

где точная верхняя и нижняя грани берутся по всем открытым кубам $Q_\delta \ni x$, $Q_\delta \subset D$, радиус δ которых меньше r. (Здесь индекс δ обозначает радиус куба Q_δ, центр куба не фиксируется, так как рассматриваются все кубы, содержащие точку x.)

23.5. Лемма. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а Φ — квазиаддитивная функция множества, определенная на открытых подмножествах из $\mathcal{O}(D)$. Тогда ее верхняя и нижняя производные — измеримые функции.*

Доказательство. Докажем, что функция

$$M_\Phi(x,r) = \sup_{0<\delta<r,\, x\in Q_\delta} \frac{\Phi(Q_\delta)}{|Q_\delta|}$$

полунепрерывна снизу при всяком фиксированном $r > 0$ для всех $x \in D$ таких, что $\operatorname{dist}(x, \partial D) > 2r$. Фиксируем точку $x_0 \in D$ такую, что $\operatorname{dist}(x_0, \partial D) > 2r$. Если $M^\Phi(x_0, r) = \infty$, то для произвольного числа A найдется открытый куб $Q_\varepsilon \subset D$, содержащий точку x_0, $\varepsilon < r$, такой, что

$$A < \frac{\Phi(Q_\varepsilon)}{|Q_\varepsilon|} \le M_\Phi(x_0, r).$$

Заметим, что куб Q_ε является окрестностью точки x_0. Тогда по определению максимальной функции имеем

$$A < \frac{\Phi(Q_\varepsilon)}{|Q_\varepsilon|} \le M_\Phi(x, r)$$

для любой точки $x \in Q_\varepsilon$. Следовательно, $\underline{\lim}_{x\to x_0} M_\Phi(x,r) = \infty$.

Рассмотрим случай $M_\Phi(x_0, r) < \infty$. По определению максимальной функции для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется открытый куб $Q_\varepsilon \subset D$, содержащий точку x_0, $\varepsilon < r$, такой, что выполнены неравенства

$$\frac{\Phi(Q_\varepsilon)}{|Q_\varepsilon|} \leq M_\Phi(x_0, r) < \frac{\Phi(Q_\varepsilon)}{|Q_\varepsilon|} + \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность точек $\{x_n\}_1^\infty$, сходящуюся к точке x_0. Выберем натуральное число N так, что при всех $n > N$ выполняется $x_n \in Q_\varepsilon$. Тогда

$$M_\Phi(x_n, r) \geq \frac{\Phi(Q_\varepsilon)}{|Q_\varepsilon|} > M_\Phi(x_0, r) - \varepsilon.$$

Так как ε выбрано произвольно, получаем $M_\Phi(x_0, r) \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} M_\Phi(x_n, r)$.

Следовательно, функция $M_\Phi(x, r)$ полунепрерывна снизу, и поэтому $E_t = \{x \in U : M_\Phi(x, r) > t\}$ — открытое множество для любого $t > 0$. По теореме 15.28 $M_\Phi(x, r)$ — измеримая функция. Отсюда по теореме 15.15 верхняя производная $\overline{\Phi}'(x)$ измерима как предел измеримых функций: $\overline{\Phi}'(x) = \lim\limits_{r\to 0} M_\Phi(x, r)$.

Применим лемму 22.3 для оценки меры множества Лебега E_t.

23.6. Лемма. *Пусть Φ — квазиаддитивная функция, определенная на системе $\mathcal{O}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^k$. Тогда если в каждой точке измеримого множества $E \subset D$ выполняется неравенство $\overline{\Phi}'(x) > t > 0$, то для любого открытого множества $U \supset E$, $U \in \mathcal{O}(D)$, имеем*

$$|E| \leq \frac{\Phi(U)}{t}. \tag{23.1}$$

Доказательство. Действительно, возьмем произвольную точку $x \in E$. Тогда найдется последовательность открытых кубов $Q_l^x \subset U$, $x \in Q_l^x$, радиусы которых стремятся к нулю, такая, что неравенство

$$\frac{\Phi(Q_l^x)}{|Q_l^x|} > t > 0$$

выполнено при всех $l \in \mathbb{N}$. Семейство $\bigcup\limits_{x\in E}\Big(\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} Q_l^x\Big)$ образует покрытие множества E в смысле Витали, значит, по следствию 22.3 найдется последовательность попарно непересекающихся открытых кубов Q_m из этого семейства такая, что $\Big|E \setminus \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} Q_m\Big| = 0$.

Имеем
$$|E| = \sum_{m\in\mathbb{N}} |Q_m|,$$
и $t|Q_m| < \Phi(Q_m)$ при каждом m. Следовательно,
$$t|E| = t\sum_{m\in\mathbb{N}} |Q_m| \le \sum_{m\in\mathbb{N}} \Phi(Q_m) \le \Phi(U)$$
и поэтому нужное неравенство установлено.

23.7. Следствие. *Верхняя производная $\overline{\Phi}'(x)$ почти всюду конечна.*

Доказательство. В соответствии с определением квазиаддитивной функции множества для любой точки $x \in D$ существует куб $Q_x \ni x$, $Q_x \subset D$, такой, что $\Phi(Q_x) < \infty$. Из формулы 23.1 имеем, что для множества $E = \{x \in D : \overline{\Phi}'(x) = \infty\}$ справедлива оценка
$$|E \cap Q_x| \le \frac{\Phi(Q_x)}{t}.$$
для любого $t > 0$. Следовательно, $|E \cap Q_x| = 0$. Совокупность кубов $\{\lambda Q_x : x \in U, \ \lambda \in (0, 1/4)\}$ образует покрытие Витали множества D. По следствию 22.4 из нее можно выделить не более чем счетную дизъюнктную систему кубов $\{Q_m = Q_m(x_m, r_m)\}$ такую, что
$$D = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m(x_m, 4r_m).$$
Тогда $E = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} Q_m(x_m, 4r_m) \cap E$. Поскольку каждое пересечение $Q_m(x_m, 4r_m) \cap E$ имеет нулевую меру, то $|E| = 0$.

23.8. Теорема. *Пусть квазиаддитивная функция множества Φ определена на системе $\mathcal{O}(D)$ открытых подмножеств, $D \subset \mathbb{R}^k$. Тогда*
$$\int\limits_U \overline{\Phi}'(x)\, dx \le \Phi(U) \tag{23.2}$$
для любого открытого множества $U \in \mathcal{O}(D)$.

Доказательство. Фиксируем множество $U \in \mathcal{O}(D)$. Открытое множество $U \in \mathcal{O}(D)$ представим в виде объединения трех множеств:

$Z = \{x \in U : \overline{\Phi}'(x) = 0\}$, $A = \{x \in U : 0 < \overline{\Phi}'(x) < \infty\}$, $S = \{x \in U : \overline{\Phi}'(x) = \infty\}$. Заметим, что по следствию 23.7 $|S| = 0$, а

$$\int\limits_Z \overline{\Phi}'(x)\,dx = 0.$$

Поэтому достаточно доказать

$$\int\limits_A \overline{\Phi}'(x)\,dx \le \Phi(U). \tag{23.3}$$

Фиксируем произвольное число $t > 1$. Множество

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} P_n, \quad \text{где} \quad P_n = \{x \in D : t^n < \overline{\Phi}'(x) \le t^{n+1}\}.$$

Фиксируем произвольное компактное множество $F_n \subset P_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для фиксированного конечного набора $K \subset \mathbb{Z}$ рассмотрим произвольную дизъюнктную систему открытых множеств $U_n \supset F_n$, $U_n \subset U$, $n \in K$. Возьмем произвольную точку $x \in F_n$. Тогда найдется последовательность кубов $Q(x, r_l(x)) \subset U_n$, радиусы которых стремятся к нулю, такая, что неравенства

$$t^n|Q(x, r_l(x))| < \Phi(Q(x, r_l(x)))$$

справедливы при всех $l \in \mathbb{N}$. Пусть $F = \bigcup\limits_{n\in K} F_n$. Очевидно, что семейство кубов $\bigcup\limits_{x\in F}\bigl(\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} Q(x, r_l(x))\bigr)$ образует покрытие множества F в смысле Витали. Следовательно, найдется последовательность дизъюнктных кубов Q_m из этого семейства такая, что $\bigl|F \setminus \bigcup\limits_m Q_m\bigr| = 0$. Заметим, что в силу выбора кубов справедливо также свойство $\bigl|F_n \setminus \bigcup\limits_{Q_m\subset U_n} Q_m\bigr| = 0$ для любого $n \in K$. Следовательно, отсюда вытекает $|F_n| = \sum\limits_{Q_m\subset U_n} Q_m$. Далее имеем

$$\Phi(U) \ge \sum_{m\in\mathbb{N}} \Phi(Q_m) = \sum_{n\in K}\sum_{Q_m\subset U_n} \Phi(Q_m) \ge \sum_{n\in K} t^n\Bigl(\sum_{Q_m\subset U_n} |Q_m|\Bigr)$$
$$\ge \sum_{n\in K} t^n|F_n| \ge \sum_{n\in K} t^{-1}\int\limits_{F_n} \overline{\Phi}'(x)\,dx.$$

Так как множества $F_n \subset P_n$, $n \in K$, произвольны, из доказанного вытекает неравенство

$$\Phi(U) \geq \sum_{n\in K} t^{-1} \int\limits_{P_n} \overline{\Phi}'(x)\, dx.$$

Так как набор $K \subset \mathbb{Z}$ произволен, то из предыдущего неравенства имеем

$$\Phi(U) \geq \sum_{n\in \mathbb{Z}} t^{-1} \int\limits_{P_n} \overline{\Phi}'(x)\, dx = t^{-1} \int\limits_{A} \overline{\Phi}'(x)\, dx.$$

Поскольку число $t > 1$ произвольное, то отсюда немедленно получаем (23.3).

Из доказанной теоремы очень просто вытекает известная теорема Лебега о дифференцировании интеграла.

23.9. Следствие. *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$. Предположим, что функция f принадлежит $L_1(D;\mathbb{E})$, где $\mathbb{E}$ — банахово сепарабельное пространство. Тогда для почти всех $x \in D$*

$$\lim_{\delta\to 0,\, Q_\delta \ni x} \frac{1}{|Q_\delta|} \int\limits_{Q_\delta} |f(y) - f(x)|_{\mathbb{E}}\, dy = 0. \tag{23.4}$$

Доказательство. Для неотрицательной функции $g \in L_1(D)$ и открытого множества $U \subset D$ положим

$$\Phi(U) = \int\limits_{U} g(y)\, dy.$$

Так как Φ — монотонная аддитивная функция множества, то по теореме 23.8 для произвольного открытого множества $U \subset D$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{U} \overline{g}(y)\, dy \leq \Phi(U) = \int\limits_{U} g(y)\, dy,$$

где

$$\overline{g}(x) = \lim_{h\to 0} \sup_{x\in Q_\delta, \delta<h} \frac{1}{|Q_\delta|} \int\limits_{Q_\delta} g(y)\, dy = \overline{\Phi}'(x).$$

Поскольку неравенство $\int\limits_U (\overline{g}(y) - g(y))\,dy \le 0$ выполняется для всех открытых множеств $U \subset D$, то в силу следствия 17.11 для почти всех $x \in D$ справедливо

$$\overline{g}(x) \le g(x). \tag{23.5}$$

Далее, фиксируем в $\mathbb{E}$ счетное всюду плотное множество $p \in \mathbb{S}$. Для произвольного элемента $p \in \mathbb{S}$ положим $g_p(y) = |f(y) - p|_{\mathbb{E}}$. Применяя неравенство (23.5) к функции g_p, получаем, что

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \sup_{x\in Q_\delta, \delta<h} \frac{1}{|Q_\delta|}\int\limits_{Q_\delta} |f(y) - f(x)|_{\mathbb{E}}\,dy \\ \le \lim_{h\to 0} \sup_{x\in Q_\delta, \delta<h} \frac{1}{|Q_\delta|}\int\limits_{Q_\delta} (g_p(y) + |f(x) - p|_{\mathbb{E}})\,dy \\ \le g_p(x) + |f(x) - p|_{\mathbb{E}} = 2|f(x) - p|_{\mathbb{E}}\end{aligned} \tag{23.6}$$

для всех $x \in D \setminus \Sigma_p$, где $|\Sigma_p| = 0$. Так как $\mathbb{S} \subset \mathbb{E}$ — счетная совокупность элементов, то множество $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{S}} \Sigma_p$ имеет нулевую меру. Поскольку при фиксированном $x \in D \setminus \bigcup\limits_{p\in\mathbb{Q}} \Sigma_p$ соотношения (23.6) справедливы для любого $p \in \mathbb{S}$, а элемент p может быть выбран сколь угодно близким к значению $f(x)$, то равенство 23.4 доказано.

Заметим, что приведенное доказательство теоремы Лебега применимо на широком классе метрических пространств.

23.10. Следствие. *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$. Предположим, что функция f принадлежит $L_1(D;\mathbb{E})$, где E — банахово сепарабельное пространство. Тогда для почти всех $x \in D$*

$$\lim_{\delta\to 0,\, Q_\delta \ni x} \frac{1}{|Q_\delta|}\int\limits_{Q_\delta} f(y)\,dy = f(x).$$

Доказательство. Действительно, в силу ограниченности интеграла Лебега имеем

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|Q_\delta|}\int\limits_{Q_\delta} f(y)\,dy - f(x)\right|_{\mathbb{E}} = \left|\frac{1}{|Q_\delta|}\int\limits_{Q_\delta} f(y)\,dy - \frac{1}{|Q_\delta|}\int\limits_{Q_\delta} f(x)\,dy\right|_{\mathbb{E}} \\ = \frac{1}{|Q_\delta|}\left|\int\limits_{Q_\delta} (f(y)\,dy - f(x))\,dy\right|_{\mathbb{E}} \le \frac{1}{|Q_\delta|}\int\limits_{Q_\delta} |f(y) - f(x)|_{\mathbb{E}}\,dy.\end{aligned}$$

Требуемый результат вытекает теперь из следствия 23.9.

23.11. Следствие. *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а квазиаддитивная функция множества Φ определена на системе $\mathcal{O}(D)$ открытых подмножеств, $D \subset \mathbb{R}^k$. Тогда*

$$\overline{\Phi}'(x) = \underline{\Phi}'(x)$$

для почти всех $x \in D$.

Доказательство. Из неравенства 23.2 следует, что для произвольного куба $Q_\delta \subset D$ справедливо

$$\frac{1}{|Q_\delta|} \int\limits_{Q_\delta} \overline{\Phi}'(x)\, dx \le \frac{1}{|Q_\delta|} \Phi(Q_\delta).$$

Переходя в последнем неравенстве к нижнему пределу по всем кубам $Q_\delta \ni x$ при $\delta \to 0$ и применяя следствие 23.9, находим

$$\overline{\Phi}'(x) \le \underline{\Phi}'(x)$$

для почти всех $x \in D$.

23.12. Следствие. *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а квазиаддитивная функция множества Φ определена на системе $\mathcal{O}(D)$ открытых подмножеств, $D \subset \mathbb{R}^k$. Тогда*

a) *в почти каждой точке $x \in D$ существует конечная производная*

$$\lim_{\delta \to 0,\, Q_\delta \ni x} \frac{\Phi(Q_\delta)}{|Q_\delta|} = \Phi'(x);$$

b) *для любого открытого множества $U \in \mathcal{O}(D)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_U \Phi'(x)\, dx \le \Phi(U).$$

23.13. Определение. Значение производной $\Phi'(x)$ квазиаддитивной функции множества Φ в тех точках, в которых она существует, называется *плотностью* квазиаддитивной функции множества в точке x.

23.14. Определение. Пусть квазиаддитивная функция множества Φ определена на открытых подмножествах открытого множества $D \subset \mathbb{R}^k$. Тогда функция множества

$$A \mapsto \int\limits_A \Phi'(x)\, d\mu(x),$$

определенная на борелевских множествах $A \subset D$, называется *абсолютно непрерывной составляющей* квазиаддитивной функции множества Φ и обозначается символом Φ_a.

Свойства абсолютно непрерывной составляющей формулируются в следующей лемме.

23.15. Лемма. *Пусть квазиаддитивная функция множества Φ определена на открытых подмножествах открытого множества $D \subset \mathbb{R}^k$. Тогда ее абсолютно непрерывная составляющая Φ_a удовлетворяет следующим свойствам:*

1) $\Phi_a(U) \leq \Phi(U)$ *для любого открытого множества* $U \subset D$*;*

2) Φ_a *является монотонной счетно-аддитивной функцией множества, определенной на борелевских множествах из* D*;*

3) $\Phi_a(E) = 0$ *для любого борелевского множества* $E \subset D$ *нулевой меры Лебега.*

Последнее свойство сформулированного утверждения мотивирует формулируемое ниже определение, которое относится к счетно-аддитивным функциям множества Φ, определенным на σ-алгебре $\mathcal{B}(D)$ борелевских подмножеств открытого множества $D \subset \mathbb{R}^k$. Такие функции называются *мерами.* Из определения, в частности, получаем свойство монотонности: *если* $A, B \in \mathcal{B}(D)$ *и* $A \subset B$*, то* $\Phi(A) \leq \Phi(A)$.

23.16. Определение. Пусть мера Φ определена на σ-алгебре $\mathcal{B}(D)$ борелевских подмножеств открытого множества $D \subset \mathbb{R}^k$. Мера Φ называется *абсолютно непрерывной*, если $\Phi(E) = 0$ для любого борелевского множества $E \subset D$ нулевой меры Лебега.

Характеристическим свойством абсолютно непрерывной меры является ее полное восстановление по плотности.

23.17. Теорема. *Пусть мера Φ определена на σ-алгебре $\mathcal{B}(D)$ борелевских подмножеств открытого множества $D \subset \mathbb{R}^k$. Тогда функ-*

ция Φ дифференцируема почти во всех точках открытого множества D:

$$\lim_{\delta\to 0,\, Q_\delta \ni x} \frac{\Phi(Q_\delta)}{|Q_\delta|} = \Phi'(x), \tag{23.7}$$

и

$$\int\limits_A \Phi'(x)\, d\mu(x) = \Phi(A) \tag{23.8}$$

для любого борелевского множества $A \in \mathcal{B}(D)$.

Доказательство. Понятно, что мера является квазиаддитивной функцией множества, поэтому существование плотности почти всюду вытекает из следствия 23.12.

Докажем справедливость равенства (23.8) для всякого открытого множества $\Omega \subset D$ конечной меры. Из (23.7) вытекает, что в почти каждой точке $x \in \Omega$ имеем

$$\lim_{r\to 0} \frac{\Phi(Q(x,r))}{|Q(x,r)|} = \Phi'(x).$$

С другой стороны, из теоремы 23.8 получаем, что плотность $\Phi'(x)$ интегрируема на любом компактном подмножестве из D, а тогда из следствия 23.10 вытекает, что

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} \Phi'(x)\, dy = \Phi'(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Отсюда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $r_0(x) > 0$ такое, что в каждой точке $x \in \Omega \setminus S$, где S — некоторое множество нулевой меры, имеем $Q(x,r) \subset \Omega$ и

$$\left| \frac{|f(Q(x,r))|}{|Q(x,r)|} - \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} \Phi'(x)\, dx \right| \le \frac{1}{m} \tag{23.9}$$

для всех $r \in (0, r_0(x))$. Совокупность кубов $\{Q(x,r) : x \in \Omega \setminus S,\ r \in (0, r_0(x))\}$ образует покрытие Витали измеримого множества $\Omega \setminus S$. Выделим из нее по теореме Витали дизъюнктную не более чем счетную систему кубов Q_n такую, что $\left|\Omega \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n\right| = 0$. Отсюда вытекает, что дополнение $E = \Omega \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ — борелевское множество нулевой меры и

$$|\Omega| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |Q_n|.$$

Из формулы (23.9) для любого куба Q_n имеем

$$-\frac{|Q_n|}{m} \le |\Phi(Q_n)| - \int\limits_{Q_n} \Phi'(x)\,dx \le \frac{|Q_n|}{m}. \tag{23.10}$$

Суммируя формулу (23.10) по всем кубам Q_n, получаем

$$-\frac{|\Omega|}{m} \le \Phi\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\Big) - \int\limits_{\Omega} \Phi'(x)\,dx \le \frac{|\Omega|}{m}. \tag{23.11}$$

Формула (23.11) справедлива для всех $m \in \mathbb{N}$, поэтому в ней возможен предельный переход при $m \to \infty$:

$$\Phi\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\Big) = \int\limits_{\Omega} \Phi'(x)\,dx. \tag{23.12}$$

Учитывая, что $\Omega = E \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ и $\Phi(E) = 0$, из формулы (23.12) получаем

$$\Phi(\Omega) = \Phi(E) + \Phi\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\Big) = \int\limits_{\Omega} \Phi'(x)\,dx. \tag{23.13}$$

Заметим, что произвольное открытое множество $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, где $\Omega_n = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}$ и $|x|_\infty < n\}$. Поскольку для открытого множества Ω_n конечной меры имеем равенство (23.13), то оно распространяется и на множество Ω, так как $\Phi(\Omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(\Omega_n)$.

Поскольку по следствию 17.10 всякое борелевское множество $A \subset U$ содержится в некотором борелевском Ω_σ, причем $\Omega_\sigma = \bigcap\limits_{n} \Omega_n$, где $\{\Omega_n \subset U\}$, $n \in \mathbb{N}$, — убывающая последовательность открытых множеств, а борелевское множество $S = \Omega_\sigma \setminus A$ имеет нулевую меру, то равенство (23.8) можно распространить на произвольные борелевские множества $A \subset D$. Действительно, $\Omega_\sigma = A \cup S$. Поэтому $\Phi(\Omega_\sigma) = \Phi(A)$, так как мера Φ абсолютно непрерывна. Отсюда равенство (23.13) можно распространить на произвольное борелевское множество.

23.18. Пример. Рассмотрим функцию множества примера 23.2. Из следствия 23.12 получаем теорему о дифференцируемости монотонной функции множества: *всякая монотонная функция дифференцируема почти всюду.* Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ — монотонная функция.

Если в точке $x \in (a,b)$

$$\lim_{\beta-\alpha\to 0,\,(\alpha,\beta)\ni x} \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \Phi'(x),$$

то

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x).$$

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что для всех сегментов $(\alpha,\beta) \ni x$, $\beta-\alpha < \delta$, справедливо неравенство

$$-\varepsilon < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} - \Phi'(x) < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что в точке x функция f непрерывна и поэтому в последнем соотношении возможен предельный переход как при $\alpha \to x-0$, так и при $\beta \to x+0$. Результаты этих предельных переходов можно записать в одном соотношении

$$-\varepsilon \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - \Phi'(x) \le \varepsilon$$

для любого y такого, что $|x-y| < \delta$. Отсюда вытекает дифференцируемость функции f в точке x.

Из следствия 23.12 получаем

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx \le f(\beta)-f(\alpha)$$

для любого интервала $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$.

23.19. Пример. Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$. Предположим, что функция f принадлежит $L_1(D;\mathbb{E})$, где E — банахово сепарабельное пространство. Тогда для почти всех $x \in D$

$$\lim_{\delta\to 0,\,Q_\delta\ni x} \frac{1}{|Q_\delta|}\int_{Q_\delta} f(y)\,dy = f(x).$$

Действительно, в силу ограниченности интеграла Лебега имеем

$$\left|\frac{1}{|Q_\delta|}\int_{Q_\delta} f(y)\,dy - f(x)\right|_{\mathbb{E}} \le \frac{1}{|Q_\delta|}\int_{Q_\delta} |f(y)-f(x)|_{\mathbb{E}}\,dy.$$

Требуемый результат вытекает теперь из следствия 23.9.

23.20. Пример. Рассмотрим функцию множества примера 23.4 . Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $f : D \to \mathbb{R}^k$ — инъективное непрерывное отображение, которое определяет счетно-аддитивную функцию множества Φ:

$$A \mapsto |f(A)|,$$

определенную на борелевских множествах $U \subset D$. По следствию 23.12 эта функция множества дифференцируема почти всюду в D и ее плотность совпадает с локальным искажением меры $J(x, f)$:

$$\lim_{\delta\to 0,\, Q_\delta \ni x} \frac{\Phi(Q_\delta)}{|Q_\delta|} = \lim_{\delta\to 0,\, Q_\delta \ni x} \frac{|f(Q_\delta)|}{|Q_\delta|} = J(x, f).$$

Заметим, что в отличие от леммы 21.3 существование предела установлено без условия дифференцируемости на отображение f.

Из следствия 23.12 получаем

$$\int\limits_U J(x, f)\, dx \le |f(U)|$$

для любого открытого множества $U \subset D$.

Условие абсолютной непрерывности меры Φ эквивалентно выполнению $\mathcal{N}$-свойства Лузина для отображения f. Таким образом, если f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, то из (23.8) получаем

$$\int\limits_A J(x, f)\, d\mu(x) = \Phi(A).$$

для любого борелевского множества $A \subset D$. Эта формула точно так же, как и (21.3), доказанная для непрерывно дифференцируемых гомеоморфизмов, дает возможность доказать формулу замены переменной при более слабых предположениях регулярности на отображение f. Сформулируем здесь обобщения теорем 21.8 и 21.9.

23.21. Теорема. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{R}^k$ — инъективное непрерывное отображение, обладающее $\mathcal{N}$-свойством Лузина. Если функция $u : f(U) \to \mathbb{E}$ интегрируема на $V = f(U)$, то функция $u(f(x))J(x, f)$ интегрируема на U, при этом*

$$\int\limits_U u(f(x))J(x, f)\, dx = \int\limits_V u(y)\, dy.$$

23.22. Теорема. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{R}^k$ — инъективное непрерывное отображение, обладающее $\mathcal{N}$-свойством Лузина. Если функция $u : V \to [0, \infty]$ измерима на $V = f(U)$, то функция $u(f(x))J(x, f)$ измерима на U, при этом*

$$\int\limits_U u(f(x))J(x, f)\,dx = \int\limits_V u(y)\,dy.$$

Таким образом, обе части равенства (21.16) либо одновременно конечны, либо одновременно бесконечны.

Из леммы 21.3 получаем следующее следствие сформулированных теорем.

23.23. Следствие. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{R}^k$ — инъективное непрерывное отображение, почти всюду дифференцируемое на U и обладающее $\mathcal{N}$-свойством Лузина. Тогда справедливы утверждения теорем 23.21 и 23.22, при этом $J(x, f) = |\det df(x)|$ почти всюду в U.*