ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2-й семестр

Интуитивное представление о площади фигур на плоскости подсказывает правдоподобность следующих свойств.

1) *Монотонность*: если фигура A содержится в фигуре B, то $S(A) \leq S(B)$.

2) *Аддитивность*: для непересекающихся фигур A и B имеем $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$.

Предположим, что на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ задана непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Для точки $x \in [a, b]$ обозначим символом $S(x)$ площадь криволинейной трапеции, заключенной между графиком функции, прямолинейным отрезком $[a, x]$ на оси абсцисс и прямолинейными отрезками $\{a\} \times [0, f(a)]$ и $\{x\} \times [0, f(x)]$, параллельными оси ординат. Если эта площадь удовлетворяет свойствам 1) и 2), то нетрудно найти производную функции $S(x)$:

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x),$$

где $S(x + \Delta x) - S(x) = (f(x) + o(1))\Delta x$ — площадь криволинейной трапеции при $\Delta x \to 0$, заключенной между графиком функции и прямолинейным отрезком $[x, x + \Delta x]$, $\Delta x > 0$, ($[x + \Delta x, x]$, $\Delta x < 0$) на оси абсцисс, а величина $o(1)$ удовлетворяет условию:

$$|o(1)| \leq \operatorname{osc}(f; [x, x + \Delta x]) = \max_{y \in [x, x+\Delta x]} f(y) - \min_{y \in [x, x+\Delta x]} f(y).$$

Приведенное здесь вычисление служит мотивировкой для определения интеграла Ньютона: если производная функции $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ существует во всех точках $x \in [a, b]$ и совпадает с функцией $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, то полагают

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Правая часть не зависит от выбора функции F и поэтому интеграл определен корректно. В случае неотрицательной функции f значения интеграла совпадает с площадью криволинейной трапеции. При таком подходе к интегралу требуется дополнительная работа, связанная с определением площади и доказательством ее основных свойств.

1. Множества и их характеристические функции

Пусть $\mathbb{X}$ — некоторое множество.

1.1. Определение. *Индикатором* (или *характеристической функцией*) подмножества $A \subset \mathbb{X}$ называется функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Между теоретико-множественными операциями над множествами и арифметическими операциями над их индикаторами существует определенная связь, отмеченная в следующих соотношениях.

1.2. $\chi_\emptyset \equiv 0$, $\chi_\mathbb{X} \equiv 1$.

1.3. *$A \subset B$ тогда и только тогда, когда $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$.*

1.4. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$.

1.5. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$.

1.6. $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$.

1.7. *Если $A \subset \mathbb{X}$, а $B \subset \mathbb{Y}$, то $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$.*

1.8. $\chi_{A \Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$, *где $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность множеств A и B.*

Напомним, что некоторая система подмножеств $A \subset \mathbb{X}$ называется *дизъюнктной*, если два произвольных различных множества этой системы не пересекаются.

1.9. Задача. Система подмножеств $A \subset \mathbb{X}$ дизъюнктна тогда и только тогда, когда $\chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2} = 0$ для любых различных множеств A_1 и A_2 данной системы.

2. Разбиения отрезка

Напомним, что промежутком $\Delta = \langle c, d\rangle$, $c, d \in \mathbb{R}$, называется одно из множеств

$$\begin{aligned}
[c,d] &= \{x \in \mathbb{R} : c \le x \le d\}, \quad c \le d,\\
(c,d] &= \{x \in \mathbb{R} : c < x \le d\}, \quad c < d,\\
[c,d) &= \{x \in \mathbb{R} : c \le x < d\}, \quad c < d,\\
(c,d) &= \{x \in \mathbb{R} : c < x < d\}, \quad c < d.
\end{aligned}$$

Таким образом, промежутки — всегда непустые множества, а первый из приведенных может вырождаться в точку при $c = d$. Промежутки первого типа называются также *отрезками* (или *замкнутыми промежутками*), а четвертого типа — *интервалами* (или *открытыми промежутками*).

2.1. Определение. Пусть $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ — фиксированный промежуток. Конечная система промежутков $\{\Delta_i \subset \langle a, b\rangle\}$, $i = 1, \ldots, n$, называется *разбиением* промежутка $\langle a, b\rangle$, если выполняются следующие условия:

1) система промежутков $\{\Delta_i\}$ дизъюнктна, т. е., $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при всех $i \ne j$;

2) $\langle a, b\rangle = \bigcup\limits_i \Delta_i$.

2.2. Задача. Конечная система промежутков $\{\Delta_i \subset \langle a, b\rangle\}$, $i = 1, \ldots, n$, образует разбиение промежутка $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\chi_{\langle a,b\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\Delta_i}.$$

Заметим, что промежутки $\{\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$, $i = 1, \ldots, n$, всегда можно перенумеровать так, чтобы концы всех промежутков были упорядочены следующим образом: $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$.

2.3. Задача. Указать необходимые и достаточные условия на расположение точек, при выполнении которых всякая конечная неубывающая последовательность точек $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$ приводит к разбиению $\{\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle,\ i = 1, \ldots, n\}$ отрезка $[a, b]$.

2.4. Определение. Пусть даны два разбиения $\{\Delta_i\}$ и $\{P_j\}$ промежутка $\langle a, b\rangle$. Разбиение $\{P_j\}$ называется *подразбиением* или *измельчением* разбиения $\{\Delta_i\}$, если всякий промежуток P_j содержится в одном из промежутков разбиения $\{\Delta_i\}$.

2.5. Задача. Разбиение $\{P_j\}$ промежутка $\langle a, b\rangle$ является подразбиением разбиения $\{\Delta_i\}$ промежутка $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда для любого P_j найдется Δ_i такое, что $\chi_{P_j} \le \chi_{\Delta_i}$, т. е.,

$$\chi_{P_j}(x) \le \chi_{\Delta_i}(x) \quad \text{для всех } x \in \langle a, b\rangle.$$

Утверждение эквивалентно тому, что для любого P_j найдется Δ_i такое, что $\chi_{P_j} \cdot \chi_{\Delta_i} = \chi_{P_j}$.

2.6. Задача. Если разбиение $\{P_j\}$ промежутка $\langle a, b\rangle$ является подразбиением разбиения $\{\Delta_i\}$ промежутка $\langle a, b\rangle$, то всякий промежуток Δ_i равен объединению некоторой совокупности промежутков разбиения $\{P_j\}$. (Указание: Проверить, что $\chi_{\Delta_i} = \chi_{\Delta_i} \cdot \chi_{\langle a,b\rangle} = \chi_{\Delta_i} \cdot \sum\limits_j \chi_{P_j} = \sum\limits_j \chi_{\Delta_i} \cdot \chi_{P_j} = \sum\limits_j \chi_{\Delta_i \cap P_j}$. Следовательно, $\Delta_i = \bigcup\limits_{j,\, P_j \cap \Delta_i \ne \emptyset} P_j$.)

2.7. Лемма. *Пусть даны два разбиения $\{\Delta_i\}$ и $\{T_j\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда существует разбиение $\{P_k\}$ отрезка $[a, b]$, которое одновременно является измельчением как разбиения $\{\Delta_i\}$, так и разбиения $\{T_j\}$, и, кроме того,*

$$\Delta_i = \bigcup_{k, P_k \cap \Delta_i \ne \emptyset} P_k \quad \text{и} \quad T_j = \bigcup_{k, P_k \cap T_j \ne \emptyset} P_k. \tag{2.1}$$

Доказательство. Заметим, что непустое пересечение двух промежутков всегда является промежутком. В качестве разбиения $\{P_k\}$ отрезка $[a, b]$ можно взять всевозможные непустые пересечения $\Delta_i \cap T_j$. Во-первых, промежутки P_k попарно не пересекаются (так как каждое из разбиений $\{\Delta_i\}$ и $\{T_j\}$ дизъюнктно), и, во-вторых,

$$\bigcup_k P_k = \bigcup_{i,j} \Delta_i \cap T_j = \bigcup_i \Delta_i \cap \bigcup_j T_j = [a, b] \cap [a, b] = [a, b].$$

Таким образом, новое разбиение удовлетворяет определению 2.1. Непосредственно проверяется, что $\{P_k\}$ является одновременно измельчением разбиений $\{\Delta_i\}$ и $\{T_j\}$.

2.8. Задача. Привести другое доказательство леммы 2.7, основанное на свойствах характеристических функций: $\chi_{[a,b]} = \sum_i \chi_{\Delta_i} = \sum_j \chi_{T_j}$. Тогда $\chi_{[a,b]} = \chi_{[a,b]} \cdot \chi_{[a,b]} = \sum_i \chi_{\Delta_i} \cdot \sum_j \chi_{T_j} = \sum_{i,j} \chi_{\Delta_i} \cdot \chi_{T_j} = \sum_{i,j} \chi_{\Delta_i \cap T_j}$.

Напомним, что множество $D \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения, и — *открытым*, если вместе с любой точкой $x \in D$ в этом множестве содержится некоторый интервал $U = (x - r, x + r)$, $r > 0$. Заметим, что всякий интервал — это открытое множество. Замыканием $\overline{D}$ множества D называется объединение множества D со всеми его точками прикосновения. Заметим, что замыкание промежутка $\langle c, b\rangle$ совпадает с $[c, b]$. Таким образом, отрезки — это замкнутые множества.

2.9. Лемма о разбиении, подчиненном открытому покрытию. *Пусть конечная система $\{U_i\}$ открытых промежутков образует покрытие отрезка $[a, b]$. Тогда существует разбиение $\{P_k\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что замыкание $\overline{P}_k$ каждого промежутка этого разбиения содержится в некотором открытом промежутке $U_j \in \{U_i\}$.*

Более того, если центры $x_i \in U_i$ открытых промежутков U_i принадлежат отрезку $[a, b]$, то разбиение $\{P_k\}$ отрезка $[a, b]$ можно выбрать так, что замыканию $\overline{P}_k$ промежутка P_k, содержащемуся в некотором открытом промежутке $U_j \in \{U_i\}$, будет принадлежать также центр $x_j \in U_j$.

Доказательство. Индукцией по числу элементов покрытия $\{U_i\}$. Заметим, прежде всего, что уменьшая, если необходимо, промежутки $\{U_i\}$, составляющие открытое покрытие отрезка $[a, b]$, можно сделать так, чтобы центры $x_i \in U_i$ принадлежали отрезку $[a, b]$: если, например, интервал $U = (\alpha, \beta)$ расположен так, что $a \leq \alpha < b < \beta$, то его можно заменить таким интервалом (α, β'), $b < \beta'$, что его середина принадлежит отрезку $[a, b]$. Поэтому мы будем доказывать только второе утверждение.

Если $[a, b] \subset U_1$, то в качестве разбиения возьмем отрезок $[a, b]$.

Предположим, что лемма доказана в случае покрытия произвольного отрезка системой из n открытых промежутков, центры которых принадлежат этому отрезку.

Рассмотрим покрытие отрезка $[a,b]$ системой $\{U_i(x_i)\}$ из $(n+1)$-го открытого промежутка, центры x_i которых принадлежат $[a,b]$, $i = 1,\ldots,n+1$. Упорядочим их центры в порядке возрастания: $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n+1} \leq b$. Заметим, что если $a \notin U_1(x_1)$, а $a \in U_k(x_k)$ для некоторого $k > 1$, то $U_1(x_1) \subset U_k(x_k)$. Поэтому совокупность $U_2(x_2),\ldots,U_{n+1}(x_{n+1})$ из n открытых промежутков образует покрытие отрезка $[a,b]$, и к ней можно применить индукционное предположение.

Пусть теперь $a \in U_1(x_1)$ и пусть $U_1(x_1) = (\alpha_1, \beta_1)$. Рассмотрим два случая:

1) $\beta_1 > x_2$;

2) $\beta_1 \leq x_2$.

В первом случае замыкание промежутка $Q = [a, x_2)$ лежит в $U_1(x_1)$, причем центр x_1 принадлежит $\overline{Q}$.

Во втором случае концевая точка β_1 принадлежит одному из интервалов покрытия, например, $U_l(x_l)$, $l > 1$. Существует окрестность $V(\beta_1)$ такая, что $V(\beta_1) \subset U_l(x_l)$. В пересечении $V(\beta_1) \cap U_1(x_1)$ найдется точка γ_1 такая, что $x_1 < \gamma_1$. Тогда замыкание промежутка $Q = [a, \gamma_1)$ лежит в $U_1(x_1)$, причем центр x_1 принадлежит $\overline{Q}$.

Система $U_2(x_2),\ldots,U_{n+1}(x_{n+1})$ из n оставшихся открытых промежутков образует покрытие отрезка $[c,b]$, где c — либо x_2, либо γ_1, причем центры интервалов $U_2(x_2),\ldots,U_{n+1}(x_{n+1})$ принадлежат отрезку $[c,b]$. По индукционному предположению существует разбиение $\{P_k\}$ отрезка $[c,b]$, обладающее требуемыми свойствами. Тогда совокупность промежутков $\{Q, P_k\}$ образует разбиение отрезка $[a,b]$ с нужными свойствами.

2.10. Лемма. 1) *Дополнение к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}$ открыто.*

2) *Дополнение к открытому множеству $G \subset \mathbb{R}$ замкнуто.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если, напротив, для точки $x \in \mathbb{R} \setminus A$ не существует окрестности $U \ni x$ такой, что $U \subset \mathbb{R} \setminus A$, то любая окрестность точки x пересекается с множеством A. Таким образом, x является точкой прикосновения для A, и, в силу замкнутости множества A, должна ему принадлежать, что противоречит выбору точки x.

Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что любая точка открытого множества G не может быть точкой прикосновения для дополнения к множеству G. Поэтому дополнение $\mathbb{R} \setminus G$ содержит все свои точки прикосновения.

Приведем следующее утверждение.

2.11. Лемма. 1) *Объединение произвольной совокупности открытых на* $\mathbb{R}$ *множеств открыто.*

2) *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

3) *Пересечение произвольной совокупности замкнутых на* $\mathbb{R}$ *множеств замкнуто.*

4) *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. 1) Пусть $\{U_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — произвольное семейство открытых множеств, $U = \cup_{\xi\in\Xi} U_\xi$. Покажем, что U открыто. Пусть $x \in U$. Тогда $x \in U_\xi$ для некоторого $\xi \in \Xi$. Так как U_ξ открыто, то мы можем взять $\varepsilon > 0$ такое, что $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U_\xi$. В этом случае $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$.

2) Достаточно показать, что если U и V — открытые множества, то $U \cap V$ открыто. Действительно, пусть $x \in U \cap V$. Тогда, так как U и V открыты, то мы можем взять $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subset U$, $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset V$. Теперь, если $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то $\varepsilon > 0$, и $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U \cap V$.

Утверждения 3) и 4) получаются из предыдущих утверждений 1) и 2), примененных к дополнениям рассматриваемых множеств (см. лемму 2.10).

2.12. Теорема. 1) *Любое непустое открытое множество* U *на вещественной прямой есть объединение не более чем счетной совокупности взаимно-непересекающихся интервалов.*

2) *Если открытое множество* U *равно объединению конечной совокупности промежутков, то оно представимо как объединение конечного числа взаимно-непересекающихся интервалов.*

Доказательство. 1) Назовем две точки $x, y \in U$ эквивалентными при выполнении следующего условия: $[x, y] \subset U$, если $x \le y$, или $[y, x] \subset U$, если $y \le x$. Эквивалентные точки $x, y \in U$ обозначаем символом $x \sim y$. Непосредственно проверяется, что введенное отношение является отношением эквивалентности, т. е., оно

1) рефлексивно: $x \sim x$;

2) симметрично: если $x \sim y$, то $y \sim x$;

3) транзитивно: если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

По известной теореме о разбиении на классы эквивалентности множество U разбивается на непересекающиеся непустые классы U_ξ, причем точки $x, y \in U$ входят в один класс тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Заметим, что всякая точка x содержится в U вместе с некоторой своей окрестностью $V(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Поэтому, если если эта точка принадлежит классу U_ξ, то окрестность $V(x)$ также содержится в U_ξ (применить свойство транзитивности). Таким образом, каждый класс U_ξ — это открытое множество. Поскольку в каждом открытом множестве U_ξ найдется рациональная точка и различные классы не пересекаются, то совокупность множеств U_ξ равномощна некоторому подмножеству множества рациональных чисел и, следовательно, она не более чем счетна.

Остается показать, что каждый класс U_ξ совпадает с открытым промежутком $(\inf U_\xi, \sup U_\xi)$, где $\inf U_\xi, \sup U_\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Очевидно $U_\xi \subset [\inf U_\xi, \sup U_\xi]$. Заметим, что если $\inf U_\xi \in U_\xi$, то, с одной стороны, $\inf U_\xi \neq -\infty$, поскольку $U_\xi \subset U \subset \mathbb{R}$, а с другой стороны, $\inf U_\xi$ принадлежит U_ξ вместе с точками некоторой своей окрестности. В последнем случае найдется точка $x \in U_\xi$ такая, что $x < \inf U_\xi$. Последнее противоречит тому, что $\inf U_\xi$ является одной из нижних границ множества U_ξ. Следовательно, $\inf U_\xi \notin U_\xi$. Аналогично доказывается, что $\sup U_\xi \notin U_\xi$. Таким образом, доказано включение $U_\xi \subset (\inf U_\xi, \sup U_\xi)$.

Покажем теперь, что любая точка $x \in (\inf U_\xi, \sup U_\xi)$ принадлежит также U_ξ. Действительно, по определению нижней и верхней граней числового множества найдутся такие элементы $z, y \in U_\xi$, что $\inf U_\xi < z < x < y < \sup U_\xi$. Поскольку $z \sim y$, то $[z, y] \subset U$ и, следовательно, $[z, x] \subset U$. Таким образом, $z \sim x$ и поэтому $x \in U_\xi$. Включение $(\inf U_\xi, \sup U_\xi) \subset U_\xi$ доказано. Вместе в ним доказано также равенство $U_\xi = (\inf U_\xi, \sup U_\xi)$.

2) Доказательство второго свойства предоставляется читателю.

3. Ступенчатые функции

Напомним, что нормированным пространством называется векторное пространство $\mathbb{V}$ над полем либо действительных, либо комплексных чисел, на котором задана норма $|\cdot| : \mathbb{V} \to [0, \infty)$, удовлетворяющая трем стандартным условиям:

1) $|x| \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{V}$, и $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $|cx| = |c||x|$ для любых $x \in \mathbb{V}$ и $c \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — поле скаляров векторного пространства $\mathbb{V}$;

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ для любых $x, y \in \mathbb{V}$.

Фиксируем нормированное пространство $\mathbb{V}$.

3.1. Определение. Функция $\varphi : [a, b] \to \mathbb{V}$ называется *ступенчатой* (*относительно некоторого разбиения*), если существует разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что на каждом из промежутков Δ_i функция принимает некоторое значение $c_i \in \mathbb{V}$, $i = 1, \ldots, l$. Всякую ступенчатую функцию можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i \chi_{\Delta_i}(x).$$

Совокупность ступенчатых функций, определенных на $[a, b]$ со значениями в $\mathbb{V}$, обозначим символом $\mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{V})$. Если $\mathbb{V} = \mathcal{K}$ ($\mathbb{V} = \mathbb{R}$), то вместо $\mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{V})$ будем писать $\mathrm{Step}([a, b]; \mathcal{K})$ ($\mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{R})$).

3.2. Свойство. *Если $\varphi_1 \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{V})$, а $\varphi_2 \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{V})$ или $\varphi_2 \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathcal{K})$ — различные ступенчатые функции на отрезке $[a, b]$, то существует разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что каждая из функций φ_i, $i = 1, 2$, является линейной комбинацией характеристических функций этого разбиения.*

Доказательство. Предположим, что $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{V})$ (случай $\varphi_2 \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathcal{K})$ рассматривается аналогично). Тогда

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\Delta_i}(x),\ c_i \in \mathbb{V}, \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{T_j}(x),\ d_j \in \mathbb{V},$$

где $\{\Delta_i\}$ и $\{T_j\}$ — разбиения отрезка $[a, b]$. В соответствии с леммой 2.7 непустые пересечения $P_{i,j} = \Delta_i \cap T_j$ образуют подразбиение отрезка $[a, b]$, которое измельчает данные разбиения. В силу определения 2.1 справедливы равенства

$$\chi_{\Delta_i}(x) = \sum_{j, T_j \cap \Delta_i \neq \emptyset} \chi_{P_{i,j}}(x) \quad \text{и} \quad \chi_{T_j}(x) = \sum_{i, \Delta_i \cap T_j \neq \emptyset} \chi_{P_{i,j}}(x).$$

Из приведенных соотношений получаем

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j,\Delta_i\cap T_j\neq\emptyset} \chi_{P_{i,j}}(x) = \sum_{i,j} c_{i,j}\chi_{P_{i,j}}(x),$$

где $c_{i,j} = c_i$, если $\Delta_i \cap T_j \neq \emptyset$. Аналогично выводим

$$\varphi_2(x) = \sum_{i,j} d_{i,j}\chi_{P_{i,j}}(x),$$

где $d_{i,j} = d_j$, если $\Delta_i \cap T_j \neq \emptyset$.

3.3. Следствие. *Если $\varphi_1 = \varphi_2$ в свойстве 3.2, т. е., если мы имеем два различных представления*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{\Delta_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j\chi_{T_j}(x)$$

для одной и той же ступенчатой функции φ, то в представлениях

$$\varphi(x) = \sum_{i,j} c_{i,j}\chi_{P_{i,j}}(x) \quad \textit{и} \quad \varphi(x) = \sum_{i,j} d_{i,j}\chi_{P_{i,j}}(x)$$

имеет место совпадение $c_{i,j} = d_{i,j}$ для всех i и j таких, что $P_{i,j} = \Delta_i \cap T_j \neq \emptyset$.

Доказательство непосредственно вытекает из линейной независимости системы функций $\chi_{P_{i,j}}(x)$, которая линейно независима из-за дизъюнктности системы промежутков $P_{i,j}$.

3.4. Свойство. *Со стандартными операциями поточечного сложения и умножения функций на числа из поля скаляров $\mathcal{K}$ пространства $\mathbb{V}$ совокупность $\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$ является векторным пространством.*

Указание. Для доказательства применить свойство 3.2.

3.5. Задача. Совокупность ступенчатых функций $\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$ является подпространством пространства $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{V})$ всех ограниченных функций, определенных на $[a,b]$ со значениями в $\mathbb{V}$.

3.6. Задача. Если $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$, то функция $[a,b] \ni x \mapsto |\varphi(x)|$ принадлежит $\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$.

3.7. Задача. Если $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathcal{K})$, то их произведение $\varphi\psi$ принадлежит $\mathrm{Step}([a,b];\mathcal{K})$.

3.8. Задача. Если $\varphi_1 \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$, а $\varphi_2 \in \mathrm{Step}([a,b];\mathcal{K})$, то произведение $\varphi_2\varphi_1 \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$.

3.9. Задача. Если $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$, то $\min(\varphi,\psi)$ и $\max(\varphi,\psi)$ принадлежат $\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$.

3.10. Задача. Если $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$, то для любого промежутка $\langle c,d\rangle \subset [a,b]$ произведение $\chi_{\langle c,d\rangle}\varphi$ — также ступенчатая функция.

4. Мера

4.1. Определение. Пусть задан некоторый непустой промежуток $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$. Вещественнозначная функция $\mu : P \mapsto \mu(P)$, определенная на совокупности всех промежутков $P \subset \langle a,b\rangle$ и принимающая значения в $\mathbb{R}$, называется *конечно-аддитивной мерой*, если она обладает следующими свойствами:

1) *неотрицательности*: $\mu(P) \geq 0$ для любого промежутка $P \subset \langle a,b\rangle$;

2) *монотонности*: $\mu(P) \leq \mu(Q)$, если $P \subset Q \subset \langle a,b\rangle$;

и

3) *конечной аддитивности*: если промежуток $\Delta \subset \langle a,b\rangle$ равен объединению конечной дизъюнктной совокупности промежутков $\{T_i\}$, то $\mu(\Delta) = \sum\limits_i \mu(T_i)$.

В дальнейшем, если не оговорено специально, мы будем писать «*мера*» вместо «конечно-аддитивная мера».

4.2. Задача. Показать, что свойство монотонности вытекает из свойства конечной аддитивности меры.

(Указание. Показать, что если промежуток P содержится в промежутке Q, то Q может быть представлен как объединение не более чем трех промежутков, один из которых P.)

Приведем примеры мер.

4.3. Пример. Если $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток с концевыми точками a и b, $a \leq b$, то его *мерой Лебега* называется величина $|I| = b - a$, независимо от того, включены концевые точки в промежуток или не включены. Мера Лебега называется иногда канонической поскольку она возникла при измерении длин протяженных объектов в результате длительной эволюции.

4.4. Свойства меры Лебега. *Мера Лебега обладает свойствами* 1), 2) *и* 3) *п.* 4.1.

Доказательство первого и второго свойств очевидно. Третье свойство доказывается по индукции.

4.5. Определение. Пусть $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция, определенная на вещественной оси. Для промежутка $\Delta = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ положим

$$\mu(\Delta) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Отметим, что мера μ любого промежутка неотрицательна, а мера точки x равна 0. Монотонно возрастающую функцию α, участвующую в определении меры μ, будем в дальнейшем называть *измеряющей функцией.*

4.6. Свойства меры. *Мера определения* 4.5 *обладает свойствами* 1), 2) *и* 3) *п.* 4.1.

4.7. Задача. Показать, что конечно-аддитивная мера может быть задана некоторой измеряющей функцией в соответствии с определением 4.5 тогда и только тогда, когда $\mu(x) = 0$ для любой точки $x \in [a, b]$. (Указание. В качестве измеряющей функции следует взять $g(x) = \mu([a, x])$.)

В следующем примере указан другой способ задания меры на промежутках вещественной прямой по заданной измеряющей функции α.

4.8. Определение. Пусть $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция, определенная на вещественной оси. Положим

$$\begin{aligned}
\mu([a, b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a-), \\
\mu([a, b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a-), \\
\mu((a, b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a+), \\
\mu((a, b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a+).
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha(x+)$ $(\alpha(x-))$ — предел справа (слева) функции α в точке x.

Отметим, что мера μ любого промежутка неотрицательна, а мера точки x равна скачку функции α в точке x: $\mu(\{x\}) = \alpha(x+) - \alpha(x-)$.

4.9. Задача. Доказать, что мера из определения 4.8 обладает свойствами 1), 2) и 3) п. 4.1.

4.10. Задача. Доказать, что мера из определения 4.8 удовлетворяет условию $\mu(\langle a, b\rangle) = \alpha(b) - \alpha(a)$ для любого промежутка $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда функция α непрерывна.

4.11. Задача. Привести пример конечно-аддитивной меры, которой не может быть определена по некоторой измеряющей функции в соответствии с определениями 4.5 и 4.8.

4.12. Замечание. *Заметим, что измеряющая функция α в определениях 4.5 и 4.8 задается на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$. В дальнейшем мы будем говорить о мерах определений 4.5 и 4.8, задаваемых неубывающей на отрезке $[a, b]$ функцией $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Чтобы учесть поведение меры в концевых точках отрезка $[a, b]$ мы всегда предполагаем, что функция g продолжается до функции $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ как*

$$\alpha(x) = \begin{cases} g(a) & \text{для всех } x \in (-\infty, a], \\ g(x) & \text{для всех } x \in (a, b), \\ g(b) & \text{для всех } x \in [b, \infty), \end{cases} \tag{4.1}$$

и продолжение α задает меру на промежутках отрезка $[a, b]$, поскольку оно — измеряющая функция на $\mathbb{R}$.

Существенное отличие мер из определений 4.5 и 4.8 проявляется в следующем свойстве.

4.13. Определение свойства регулярности. *Рассмотрим меру μ, определенную на промежутках из $\mathbb{R}$, т. е., каждому промежутку Q соответствует неотрицательное число $\mu(Q)$. Говорят, что функция μ обладает свойством регулярности, если для любого промежутка Q и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют замкнутый промежуток $F \subset \mathbb{R}$ и открытый промежуток $G \subset \mathbb{R}$ такие, что*

$$F \subset Q \subset G \quad \text{и} \quad \mu(G) - \varepsilon \le \mu(Q) \le \mu(F) + \varepsilon.$$

Напомним, что множество $D \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения, и *открытым*, если вместе с любой точкой $x \in D$ в этом множестве содержится некоторый интервал $U = (x - r, x + r)$, $r > 0$. Замыканием множества D называется объединение множества D со всеми его точками прикосновения. Заметим, что замыкание промежутка $\langle a, b\rangle$ совпадает с $[a, b]$.

4.14. Задача. Показать, что мера определения 4.8 обладает свойством регулярности, а мера определения 4.5 таким свойством не обладает.

4.15. Определение. Определим *δ-функцию Дирака* (или *меру Дирака*) в точке $c \in \mathbb{R}$ как меру δ_c такую, что $\delta_c(P) = 1$, если промежуток $P \subset \mathbb{R}$ содержит точку c, и $\delta_c(P) = 0$ в противном случае. Про такую меру говорят, что она *определена единичной массой в точке* $c \in \mathbb{R}$. *Мерой Дирака* (без уточнения точки c) называют меру, относящуюся к нулю вещественной прямой.

4.16. Задача. Показать, что δ_c-функция Дирака является регулярной мерой.

4.17. Определение. *Функцией Хевисайда* называется вещественная функция Y на $\mathbb{R}$, определяемая по формуле

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \leq 0, \\ 1 & \text{для} \quad x > 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

4.18. Задача. Показать, что δ-функция Дирака задается функцией Хевисайда в соответствии с определением 4.8, а δ_c-функция Дирака — функцией $Y(x - c)$.

4.19. Определение. Пусть $\{c_k \in [a, b]\}$, $k \in \mathbb{N}$, — не более чем счетная совокупность попарно различных точек, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — произвольный сходящийся ряд с положительными членами. *Атомической мерой* промежутка $P \subset [a, b]$ называют меру

$$\mu(P) = \sum_{k,\, c_k \in P} a_k.$$

4.20. Задача. Показать, что мера определения 4.19 обладает свойствами конечной и счетной аддитивности (см. ниже определение 4.34), а также свойством регулярности.

4.21. Задача. Показать, что мера определения 4.19 может быть задана некоторой измеряющей функцией в соответствии с определением 4.8. В качестве измеряющей функции можно, например, взять функцию $g(x) = \mu([a, x])$. Указать другие примеры измеряющих функций, с помощью которых можно задать меру μ.

4.22. Задача. Показать, что конечно-аддитивная мера может быть задана некоторой измеряющей функцией в соответствии с определением 4.8 тогда и только тогда, когда она регулярна. (Указание. В этом случае достаточно показать, что $\mu(\{x\}) = \lim\limits_{r\to 0+} \mu((x-r, x+r))$, а затем воспользоваться свойством конечной аддитивности: тогда $\mu([c, d]) = \lim\limits_{r\to 0+} \mu((c-r, c+r))$ и т. д.)

Множества нулевой меры

4.23. Определение. Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}$ *имеет μ-меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие этого множества не более чем счетным набором промежутков $P_i = \langle a_i, b_i \rangle$, суммарная мера которых меньше ε, т. е.

$$\sum_i \mu(P_i) < \varepsilon.$$

4.24. Задача. Доказать, что если мера μ обладает свойством регулярности, то в определении множества нулевой μ-меры произвольные промежутки можно заменить открытыми промежутками, т. е., множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет μ-меру нуль тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто не более чем счетным набором интервалов $U_i = (a_i, b_i)$ таким образом, что

$$\sum_i \mu(U_i) < \varepsilon.$$

Свойства

4.25. *Любое подмножество множества μ-меры нуль имеет μ-меру нуль.*

Доказательство предоставляется читателю.

4.26. *Объединение не более чем счетной совокупности множеств нулевой μ-меры есть множество нулевой μ-меры.*

Доказательство. Пусть E_i — множества нулевой μ-меры и $\varepsilon > 0$. Для произвольного $i \in \mathbb{N}$ множество E_i можно покрыть не более чем счетной совокупностью промежутков $P_{i,j}$, $j \in \mathbb{N}$, сумма μ-мер которых меньше $\varepsilon/2^i$: $\sum\limits_j \mu(P_{i,j}) < \varepsilon/2^i$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{i,j} \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{i,j}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

4.27. *Если μ — мера определения 4.5, то конечное (счетное) множество точек имеет μ-меру нуль.*

4.28. *Если μ — мера Лебега (или мера определения 4.8 с непрерывной измеряющей функцией α), то счетное множество точек имеет μ-меру нуль независимо от способа определения.*

Доказательство. В силу предыдущего свойства достаточно только проверить, что точка имеет нулевую μ-меру. Это свойство вытекает из непрерывности измеряющей функции (см. задачу 4.10):

$$\mu(\{x\}) = \alpha(x+) - \alpha(x-) = 0.$$

Некоторые свойства мер и покрытий

Сформулируем здесь одно утверждение, доказываемое с помощью леммы 2.9.

4.29. Следствие. *Пусть отрезок $[a, b]$ покрыт конечным числом интервалов $\{U_i\}$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда*

$$|[a, b]| < \sum_{i=1}^{k} |U_i|.$$

Доказательство. По лемме 2.9 существует разбиение $\{P_l\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что замыкание $\overline{P}_l$ каждого промежутка этого разбиения содержится в некотором открытом промежутке U_i. Поэтому имеем

$$|[a,b]| = \sum_l |P_l| = \sum_{i=1}^k \sum_{l,\,\overline{P}_l \subset U_i} |P_l| < \sum_{i=1}^k |U_i|.$$

4.30. Задача. Пусть отрезок $[a,b]$ покрыт конечным числом интервалов $\{U_i\}$, $i = 1,\ldots,k$. Тогда

$$\mu([a,b]) \leq \sum_{i=1}^k \mu(U_i).$$

Привести пример измеряющей функции α и покрытия $\{U_i\}$, $i = 1,\ldots,k$, для которых вместо строгого неравенства будет равенство.

4.31. Лемма. *Пусть $\{\Delta_k\}$ — дизъюнктная система промежутков, содержащихся в открытом промежутке U, $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^\infty \mu(\Delta_k) \leq \mu(U)$$

для любой конечно-аддитивной меры μ.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что для любой конечной совокупности промежутков $\{\Delta_k\}$, $k = 1,\ldots,l$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^l \mu(\Delta_k) \leq \mu(U).$$

Так как $l \in \mathbb{N}$ — произвольное натуральное число, то в силу свойств предела лемма доказана.

4.32. Лемма. *Пусть $\{\Delta_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, — не более чем счетная дизъюнктная система промежутков на отрезке $[a,b]$ такая, что мера Лебега дополнения $[a,b] \setminus \bigcup\limits_k \Delta_k$ равна нулю. Тогда*

$$|[a,b]| = \sum_k |\Delta_k|.$$

Доказательство. Так как совокупность концевых точек системы промежутков $\{\Delta_k\}$ не более чем счетная, то в силу свойства b), п. 4.28, совокупность концевых точек промежутков, входящих в эту систему, имеет нулевую меру. Поэтому эти промежутки можно считать открытыми: все равно мера мера дополнения $E = [a, b] \setminus \bigcup\limits_k \Delta_k$ будет равна нулю. По лемме 4.31 имеем $\sum\limits_k |\Delta_k| \leq |[a, b]|$, поэтому достаточно показать, что строгого неравенства в приведенном соотношении быть не может. Пусть, напротив, $\sum\limits_k |\Delta_k| = \alpha < |[a, b]|$. Рассмотрим произвольное покрытие множества E интервалами U_j такое, что $\sum\limits_j |U_j| < |[a, b]| - \alpha$. Тогда система интервалов $\{\Delta_k, U_j\}$ образует открытое покрытие отрезка $[a, b]$ и по теореме Бореля — Лебега из нее можно выделить конечное подпокрытие $\{\Delta_{k_i}, U_{j_l}\}$, $i = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$. По следствию 4.29 имеем

$$|[a, b]| < \sum_{i=1}^{n} |\Delta_{k_i}| + \sum_{l=1}^{m} |U_{j_l}| < \alpha + |[a, b]| - \alpha = |[a, b]|.$$

Полученное противоречие показывает, что наше допущение было неправильным, что и доказывает лемму.

4.33. Задача. Доказать следующее усиление леммы 4.32: пусть мера μ удовлетворяет условию регулярности, например, μ — мера из определения 4.8, а $\{P_k\}$ — дизъюнктная не более чем счетная система промежутков на промежутке P такая, что μ-мера дополнения $P \setminus \bigcup\limits_k P_k$ равна нулю. Тогда

$$\mu(P) = \sum_k \mu(P_k).$$

4.34. Определение. Пусть μ — конечно-аддитивная мера, определенная на промежутках из $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$. Мера μ обладает *свойством счетной аддитивности*, если справедливо равенство

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k)$$

для любого промежутка $P \subset \langle a, b \rangle$ и любого представления $P = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, где $\{P_k\}$ — дизъюнктная счетная система промежутков на $\langle a, b \rangle$.

4.35. Задача. Мера Лебега, мера определения 4.8 и мера определения 4.19 обладают свойством счетной аддитивности.

Теоремы о разложении меры

В этом разделе мы рассмотрим более детально меру определения 4.8. Пусть $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — измеряющая функция на отрезке $[a,b]$, а μ — мера, заданная на промежутках отрезка $[a,b]$ в соответствии с определением 4.8. В отдельных точках мера μ может иметь ненулевую «нагрузку». Точнее, это может произойти в тех точках, где функция g имеет разрыв, поскольку $\mu(\{x\}) = g(x+) - g(x-)$ и поэтому $\mu(\{x\}) = 0$ тогда и только тогда, когда $g(x+) - g(x-) = 0$. Последнее в силу монотонности функции g эквивалентно непрерывности функции g в точке x. (Если $x = a$, то $g(a-) = g(a)$ в силу замечания 4.12 и поэтому $\mu(\{a\}) = g(a+) - g(a)$; аналогично $g(b+) = g(b)$ и $\mu(\{b\}) = g(b) - g(b-)$.)

Заметим, что совокупность точек разрыва монотонной функции g не более чем счетна. Обозначим эту совокупность символом $\{c_k\}$, где набор индексов k не более чем счетный. В точке разрыва c_k скачок $a_k = g(c_k+) - g(c_k-)$ равен сумме разрывов слева и справа:

$$a_k = g(c_k+) - g(c_k-) = g_k^- + g_k^+,$$

где

$$g_k^- = g(c_k) - g(c_k-), \quad \text{а} \quad g_k^+ = g(c_k+) - g(c_k). \tag{4.3}$$

Очевидно, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4.4}$$

сходится: его сумма не превосходит $g(b) - g(a)$.

Излагаемый ниже способ разложения измеряющей функции и теорема 14.1 представлены С. Петровым на миниконференции студентов 1-го курса 16 апреля 2004 года.

4.36. Теорема. *Всякая неубывающая функция $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ равна сумме двух функций:*

$$g = g_1 + g_2, \tag{4.5}$$

где $g_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *неубывающая непрерывная функция, а* $g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *функция скачков:*

$$g_2(x) = \sum_{k,\, c_k<x} g_k^+ + \sum_{k,\, c_k\le x} g_k^- . \tag{4.6}$$

Доказательство. Докажем, что $g_1 = g - g_2$ — непрерывная функция. Рассмотрим разность $g_1(x) - g_1(y) = (g(x) - g(y)) - (g_2(x) - g_2(y))$ при $y = c_k$. (Остальные случаи аналогичны.) При $x > c_k$ имеем

$$\begin{aligned} g_2(x) - g_2(c_k) &= \sum_{i,\, c_k\le c_i<x} g_i^+ + \sum_{i,\, c_k<c_i\le x} g_i^- \\ &= (g(c_k+) - g(c_k)) + \sum_{i,\, c_k<c_i<x} g_i^+ + \sum_{i,\, c_k<c_i\le x} g_i^- . \end{aligned}$$

Следовательно, при $x > c_k$ из вышесказанного следует

$$\begin{aligned} &g_1(x) - g_1(c_k) = (g(x) - g(c_k)) - (g_2(x) - g_2(c_k)) \\ &\quad = (g(x) - g(c_k)) - (g(c_k+) - g(c_k)) - \sum_{i,\, c_k<c_i<x} g_i^+ - \sum_{i,\, c_k<c_i\le x} g_i^- \\ &\quad = (g(x) - g(c_k+)) - \sum_{i,\, c_k<c_i<x} g_i^+ - \sum_{i,\, c_k<c_i\le x} g_i^- \to 0 \quad \text{при} \quad x \to c_k+ \end{aligned}$$

(проверить, что предел равен нулю!). Аналогично при $x < c_k$

$$\begin{aligned} g_2(x) - g_2(c_k) &= -\sum_{i,\, x\le c_i<c_k} g_i^+ - \sum_{i,\, x<c_i\le c_k} g_i^- \\ &= -(g(c_k) - g(c_k-)) - \sum_{i,\, x\le c_i<c_k} g_i^+ - \sum_{i,\, x<c_i<c_k} g_i^- . \end{aligned}$$

Следовательно, при $x < c_k$ отсюда имеем

$$\begin{aligned} &g_1(x) - g_1(c_k) = (g(x) - g(c_k)) - (g_2(x) - g_2(c_k)) \\ &\quad = (g(x) - g(c_k)) + (g(c_k) - g(c_k-)) + \sum_{i,\, x\le c_i<c_k} g_i^+ + \sum_{i,\, x<c_i<c_k} g_i^- \\ &\quad = (g(x) - g(c_k-)) + \sum_{i,\, x\le c_i<c_k} g_i^+ + \sum_{i,\, x<c_i<c_k} g_i^- \to 0 \quad \text{при} \quad x \to c_k- \end{aligned}$$

(проверить правильность вычислений).

Таким образом, на отрезке $[a,b]$ установлено разложение $g = g_1 + g_2$, где $g_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ — монотонная возрастающая непрерывная функция, а $g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ — функция скачков (4.6), монотонная и возрастающая.

Из теоремы 4.36 получаем разложение меры на непрерывную и атомическую составляющие.

4.37. Теорема. *Мера μ, заданная по измеряющей функции $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ в соответствии с определением 4.8, равна сумме двух мер:*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2, \tag{4.7}$$

где меры μ_1 и μ_2 определяются по измеряющим функциям g_1 и g_2 из (4.5) в соответствии с определением 4.8:

$$\mu_1(\langle \alpha, \beta \rangle) = g_1(\beta) - g_1(\alpha), \tag{4.8}$$

$$\mu_2(\langle \alpha, \beta \rangle) = \sum_{c_k \in \langle \alpha, \beta \rangle} a_k \tag{4.9}$$

для любого промежутка $\langle \alpha, \beta \rangle \subset [a,b]$.

Доказательство. Используем разложение $g = g_1 + g_2$ (4.5) заданной на $[a,b]$ измеряющей функции g. Отсюда получаем (4.8). Для замкнутого промежутка $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ имеем

$$\begin{aligned}
\mu([\alpha,\beta]) &= g(\beta+) - g(\alpha-) \\
&= g_1(\beta+) - g_1(\alpha-) + g_2(\beta+) - g_2(\alpha-) \\
&= g_1(\beta) - g_1(\alpha) + g_2(\beta+) - g_2(\alpha-) \\
&= \mu_1([\alpha,\beta]) + \mu_2([\alpha,\beta]),
\end{aligned}$$

где $\mu_2([\alpha,\beta]) = g_2(\alpha+) - g_2(\beta-) = \sum\limits_{c_k \in [\alpha,\beta]} a_k$ в соответствии с формулой (4.6). Формула (4.9) для промежутков других типов проверяется аналогично.

4.38. Задача. Показать, что мера μ, заданная по измеряющей функции $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ в соответствии с определением 4.5, равна сумме двух мер:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2, \tag{4.10}$$

где меры μ_1 и μ_2 определяются по измеряющим функциям g_1 и g_2 из (4.5) в соответствии с определением 4.5:

$$\mu_1(\langle \alpha, \beta \rangle) = g_1(\beta) - g_1(\alpha), \tag{4.11}$$

$$\mu_2(\langle \alpha, \beta \rangle) = g_2(\beta) - g_2(\alpha) \tag{4.12}$$

для любого промежутка $\langle\alpha,\beta\rangle\subset[a,b]$. Более того, при $\alpha<\beta$ имеем

$$g_2(\beta)-g_2(\alpha)=(g(\alpha+)-g(\alpha))+(g(\beta)-g(\beta-))+\sum_{c_k\in(\alpha,\beta)}a_k.$$

4.39. Задача. Пусть на промежутках отрезка $[a,b]$ задана произвольная конечно-аддитивная мера. Тогда совокупность $\{x\in[a,b]:\mu(\{x\})>0\}$ точек, имеющих ненулевую нагрузку, не более чем счетная.

4.40. Задача. Пусть на промежутках отрезка $[a,b]$ задана произвольная конечно-аддитивная мера, и $\{c_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, — совокупность всех точек, имеющих ненулевую нагрузку. Положим

$$\mu_1(P)=\sum_{c_k\in P}\mu(\{c_k\})$$

для любого промежутка $P\subset[a,b]$. Тогда функция промежутка

$$\mu_2(P)=\mu(P)-\mu_1(P),\quad P\subset[a,b],$$

является конечно-аддитивной мерой такой, что $\mu_2(\{x\})=0$ для любой точки $x\in[a,b]$. В силу задачи 4.7 мера μ_2 задается некоторой измеряющей функцией в соответствии с определением 4.5. В силу задачи 4.38 мера μ_2 раскладывается на непрерывную и атомическую составляющие: $\mu_2=\eta+\nu$. В совокупности имеем разложение

$$\mu=\eta+\nu+\mu_1,$$

где мера η задается непрерывной измеряющей функцией, ν — измеряющей функцией в соответствии с определением 4.5, а μ_1 — некоторой измеряющей функцией в соответствии с определением 4.8 (см. задачу 4.21).

5. Канторовы множества

5.1. Определение. Множество $E\subset\mathbb{R}$ называется *нигде не плотным в* $\mathbb{R}$, если для любого интервала U пересечение $A\cap U$, где $A=\mathbb{R}\setminus E$, содержит некоторый интервал.

5.2. Определение. Замкнутое множество в $\mathbb{R}$ называется *совершенным*, если оно не имеет изолированных точек, т. е., все его точки являются предельными.

Описание конструкции канторовых множеств.

В этом разделе мы докажем следующее утверждение.

5.3. Теорема. *Существует совершенное нигде не плотное множество мощности континуум, имеющее меру Лебега нуль.*

Доказательство. Фиксируем отрезок $F_0 = [0,1]$.

1-ый шаг. Отрезок F_0 делим на три равные части и выбрасываем интервал, лежащий посередине. В результате остается замкнутое множество F_1, $F_0 \supset F_1$, состоящее из 2 отрезков, каждый длины $\frac{1}{3}$.

Пусть на n-ом шаге построено замкнутое множество F_n, $F_{n-1} \supset F_n$, состоящее из 2^n отрезков, каждый длины $\frac{1}{3^n}$.

$(n+1)$-ый шаг. Каждый из отрезков, входящих в F_n, делим на три равные части и выбрасываем интервал, лежащий посередине. В результате остается замкнутое множество F_{n+1}, $F_n \supset F_{n+1}$, состоящее из 2^{n+1} отрезков, каждый длины $\frac{1}{3^{n+1}}$.

Продолжая этот процесс мы построим замкнутое множество F_n для произвольного $n \in \mathbb{N}$. В результате получаем последовательность вложенных замкнутых множеств $F_0 \supset F_1 \supset \ldots F_n \supset \ldots$.

Канторово множество D равно пересечению $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n$. По построению канторово множество замкнуто (см. лемму 2.11). Пусть $x \in D$ — произвольная точка, а $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Так $x \in F_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$, то найдется такое n, что длина отрезка, входящего в F_n, будет меньше ε: $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Тогда один из этих отрезков, обозначим его I_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, 2^n$, будет содержаться в интервале U: $I_{nk} \subset U$. Заметим, что концы отрезка $I_{nk} \subset U$ не выбрасываются при построении, поэтому пересечение $D \cap U$ содержит, по крайней мере, две различные точки. Таким образом, доказано, что точка $x \in D$ является предельной, и поэтому множество D совершенно.

Поскольку на $(n+1)$-ом шаге из отрезка $I_{nk} \subset U$ выбрасывается некоторый интервал, который затем не входит в множество D, то пересечение $U \cap ([0,1] \setminus D)$ содержит некоторый интервал. Так как выбор точки $x \in D$ и интервала U произвольны, то множество D нигде не плотно.

Так как $D \subset F_n$, а множество F_n состоит из 2^n отрезков одинаковой длины, равной $\frac{1}{3^n}$, канторово множество покрывается конечным числом промежутков, сумма длин которых равна $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Так как

n — произвольное число, то канторово множество имеет нулевую меру Лебега.

Остается доказать утверждение про мощность. Рассмотрим представление чисел интервала $[0, 1)$ в виде троичных дробей вида

$$ {}_{3}0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots \tag{5.1} $$

(напомним, что такие дроби не содержат 2 в периоде). Пусть T_n — множество всех конечных троичных дробей длины n, не содержащих 1 в своей записи. Обозначим через T множество всех троичных дробей, не содержащих в разложении (5.1) цифру 1. Тогда

$$ F_n = \bigsqcup_{x \in T_n} [x, x + 3^{-n}]. $$

Поэтому $T \subset F_n$, и, значит, $T \subseteq F$. Множество T имеет мощность континуума, так как мы можем каждому элементу $x \in T$ сопоставить единственный элемент из $[0, 1)$ по следующему правилу: заменим в троичной записи числа x цифру 2 на цифру 1 и возьмем число, двоичным представлением которого является полученная запись. Поскольку $F \subset [0, 1]$, то по теореме Кантора — Бернштейна[1] F также имеет мощность континуума.

Канторова лестница

Конструкция канторова множества служит источником различных обобщений и основой для построения различных экзотических примеров. В этом разделе мы построим непрерывную монотонную функцию, растущую на множестве нулевой меры Лебега.

Пусть $x \in F^c$, где $F^c = [0, 1] \setminus F$. Используем замкнутые множества $F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots \supset F$ из построения канторова множества. Функция $\tilde{f}(x)$ определяется по индукции на смежных к множеству F интервалах следующим образом: на единственном к дополнению F_1 интервале функция $\tilde{f}(x)$ равна $\frac{1}{2}$; на трех дополнительных к F_2 интервалах функция $\tilde{f}(x)$ равна $\frac{k}{2^2}$, где k соответствует номерам этих интервалов, взятых слева направо, и принимает значения от 1 до 3

[1] Теорема Кантора — Бернштейна утверждает, что если множество A равномощно некоторой части множества B, а множество B равномощно некоторой части множества A, то множества A и B равномощны. См., например, *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин «Элементы теории функция и функционального анализа» М.: «Наука», 1968. С. 23.*

(определение $\tilde{f}$ на этом шаге совпадает с ее определением на предыдущем шаге); если функция $\tilde{f}(x)$ на $2^{n-1}-1$ дополнительных к F_{n-1}, $n>2$, интервалах принимает значения $\frac{k}{2^{n-1}}$, где k, $k=1,\cdots,2^{n-1}-1$, соответствует номерам этих интервалов, взятых слева направо, то на 2^n-1 дополнительных к F_n, $n>2$, интервалах функция $\tilde{f}(x)$ равна $\frac{k}{2^n}$, где k соответствует номерам этих интервалов, взятых слева направо, и принимает значения от 1 до 2^n-1 (определение $\tilde{f}$ на этом шаге совпадает с ее определением на предыдущем шаге); и т. д.

Из определения вытекает, что $0\leq\tilde{f}(x)\leq 1$ для любого $x\in F^c$. Из определения следует также, что функция $\tilde{f}: F^c\to[0,1]$ возрастает. Это позволяет доопределить ее на множество F до функции $f:[0,1]\to[0,1]$ следующим образом: $f(0)=0$,

$$f(x)=\sup_{y\in F^c,\ y\leq x}\tilde{f}(y),\quad x>0.$$

График функции f называют *канторовой лестницей.* Кроме того, из определения функции f следует, что она возрастает. Ясно, что функция f не является постоянной.

5.4. Предложение. *(a) Функция f непрерывна.*

(b) Производная функции f равна 0 почти всюду на $[0,1]$.

Доказательство. (a) Из определения функции $\tilde{f}(x)$ следует, что множество значений функции f содержит всюду плотное в $[0,1]$ множество двоично-рациональных чисел в промежутке $[0,1)$. Значит, монотонная функция f не имеет разрывов первого рода, откуда следует, что она непрерывна.

(b) По построению f постоянна на каждом смежном к F интервале и поэтому на дополнении к F ее производная равна нулю. Поэтому f' равна нулю почти всюду на $[0,1]$.

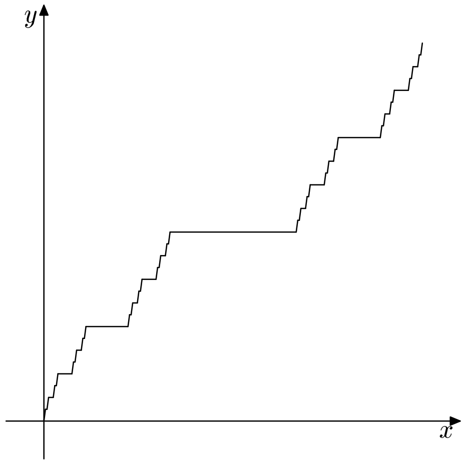

Рис. 1. Канторова лестница

Ниже изложен несколько другой способ задания канторовой лестницы, представленный С. Дятловым на миниконференции студентов 1-го курса 16 апреля 2004 года.

Пусть $x \in T^c$, где $T^c = [0,1] \setminus T$. Тогда положим величину $P(x)$ равной позиции первого вхождения цифры 1 в троичную запись числа x. При умножении числа x, $0 \le x < 1/3$, на 3, величина $P(x)$ уменьшается. Это позволяет индуктивно определить функцию $\tilde{g} : T^c \to [0,1]$:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tilde{g}(3x), & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ \frac{1}{2}(1 + \tilde{g}(3x-2)), & \text{если } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases} \tag{5.2}$$

Далее во всех рассуждениях с формулой (5.2), предполагается использование индукции по величине $P(x)$. Из (5.2) следует, что $0 \le \tilde{g}(x) \le 1$ для любого $x \in T^c$. Из определения (5.2) следует также, что функция $\tilde{g} : T^c \to [0,1]$ возрастает. Это позволяет доопределить ее на множество T до функции $g : [0,1] \to [0,1]$ следующим образом: $g(0) = 0$,

$$g(x) = \sup_{y \in T^c,\ y \le x} \tilde{g}(y), \quad x > 0.$$

Связь функции g из (5.2) с функцией f, определенной ранее, установлена в следующем утверждении.

5.5. Предложение. *Если $x \in T^c$, $P(x) = n$, и ${}_30, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$ — троичное представление числа x, то двоичное представление числа $g(x) = \tilde{g}(x)$ имеет вид ${}_20, a'_1 a'_2 \ldots a'_{n-1} 1$, где a'_i равно 0 при $a_i = 0$*

и 1 при $a_i = 2$, т. е. значение $\tilde{g}(x)$ двоично-рационально на всяком смежном к множеству F_n интервалу в соответствии с определением функции $\tilde{f}(x)$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Тогда $a_1 \neq 1$, т. е. a_1 равно 0 или 2. Пусть $a_1 = 0$ (случай $a_1 = 2$ разбирается аналогично). Тогда $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$. Из формулы (5.2) и индукционного предположения, а также того, что $P(3x) = P(x) - 1$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}\tilde{g}(3x) = \frac{1}{2}\tilde{g}(0, a_2 \ldots a_k \ldots) = \frac{1}{2} \cdot {}_2 0, a_2' \ldots a_{n-1}' 1 \\ = {}_2 0, 0a_2' \ldots a_{n-1}' 1 = {}_2 0, a_1' a_2' \ldots a_{n-1}' 1.\end{aligned}$$

5.6. Задача. Если $x \in T$, то двоичное разложение $g(x)$ получается из троичного разложения x заменой цифры 2 на цифру 1.

5.7. Задача. Функция g предложения 5.4 имеет модуль непрерывности $\omega(x) = x^{\log_3 2}$.

5.8. Задача. Показать, что $f(x) = g(x)$ для всех точек $x \in [0, 1]$.

Канторово множество положительной меры

Излагаемый ниже способ построения канторова множество положительной меры и его свойства представлены А. Авдюшенко и А. Кожевниковым на миниконференции студентов 1-го курса 16 апреля 2004 года.

Конструкцию канторовых множеств можно модернизировать таким образом, чтобы построенные множества имели те же самые топологические свойства, но ненулевую меру.

Отметим здесь, что измерение величин по Лебегу (см. пример 4.3) можно распространить на произвольные открытые и замкнутые множества. Если $U \subset \mathbb{R}$ — открытое множество в области вещественных чисел, то по теореме 2.12 оно представимо как объединение не более чем счетной совокупности дизъюнктных интервалов: $U = \bigcup\limits_k (\alpha_k, \beta_k)$. Если хотя бы один интервалов в этом представлении бесконечный, то полагаем $|U| = \infty$.

5.9. Определение. Определим меру Лебега открытого множества U как сумму мер Лебега составляющих его интервалов:

$$|U| = \sum_k |(\alpha_k, \beta_k)| = \sum_k (\beta_k - \alpha_k),$$

если ряд сходится, и полагаем $|U| = \infty$, если ряд расходится.

5.10. Определение. Определим меру Лебега замкнутого множества $A \subset [a, b]$ как разность мер Лебега:

$$|A| = |[a, b]| - |[a, b] \setminus A|.$$

5.11. Задача. Проверить корректность определения меры Лебега замкнутого множества: показать, что его мера Лебега не зависит от выбора объемлющего отрезка $[a, b]$.

5.12. Задача. Проверить, что мера Лебега открытых множеств обладает свойством монотонности и свойством счетной аддитивности: мера объединения дизъюнктной совокупности открытых множеств равна сумме мер Лебега исходных множеств: если $U = \bigcup\limits_k U_k$, то

$$|U| = \sum_k |U_k|.$$

5.13. Задача. Проверить, что мера Лебега замкнутых множеств обладает свойством монотонности и свойством счетной аддитивности.

5.14. Теорема. *Существует совершенное нигде не плотное множество мощности континуум, имеющее положительную меру Лебега.*

Доказательство. Для построения множества с требуемыми свойствами мы модифицируем схему рассуждений теоремы 5.3. Фиксируем отрезок $F_0 = [0, 1]$ и произвольное число $\delta \in (0, 1)$.

1-ый шаг. Отрезок F_0 делим на три равные части. Из среднего интервала удаляем интервал длины $\frac{1-\delta}{3}$, расположенный симметрично относительно его центра. В результате остается замкнутое множество F_1, $F_0 \supset F_1$, состоящее из 2 отрезков, каждый длины $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1-\delta}{3}\big)$.

Пусть на n-ом шаге построено замкнутое множество F_n, $F_{n-1} \supset F_n$, состоящее из 2^n отрезков, каждый длины

$$\frac{1}{2^n}\Big(1 - \Big(\frac{1-\delta}{3} + \frac{2(1-\delta)}{3^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}(1-\delta)}{3^n}\Big)\Big) = \frac{1}{3^n} + \delta\Big(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\Big).$$

Сумма мер дизъюнктных интервалов, удаленных на этом шаге из множества F_{n-1}, равна $2^{n-1} \cdot \frac{1-\delta}{3^n}$.

$(n+1)$-ый шаг. Каждый из 2^n отрезков, входящих в F_n, делим на три равные части и удаляем из среднего интервал, лежащий посередине, длины $\frac{1-\delta}{3^{n+1}}$. В результате остается замкнутое множество F_{n+1}, $F_n \supset F_{n+1}$, состоящее из 2^{n+1} отрезков равной длины и совокупной меры

$$|F_{n+1}| = 1 - \Big(\frac{1-\delta}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}(1-\delta)}{3^n} + \frac{2^n(1-\delta)}{3^{n+1}}\Big) = \Big(\delta + (1-\delta)\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1}\Big).$$

Следовательно, каждый отрезок, входящий в F_{n+1}, имеет длину, равную $\frac{1}{3^{n+1}} + \delta\big(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\big)$.

Продолжая этот процесс, мы построим замкнутое множество F_n для произвольного $n \in \mathbb{N}$. В результате получаем последовательность вложенных замкнутых множеств $F_0 \supset F_1 \supset \ldots F_n \supset \ldots$.

Канторово множество D равно пересечению $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n$. Построенное канторово множество обладает рядом удивительных свойств. По построению канторово множество замкнуто (см. лемму 2.11). Пусть $x \in D$ — произвольная точка, а $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $U = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Так как $x \in F_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$, то найдется такое n, что длина отрезка, входящего в F_n, будет меньше ε: $\frac{1}{3^n} + \delta\big(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\big) < \varepsilon$. Тогда один из этих отрезков, обозначим его I_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, 2^n$, будет содержаться в интервале U: $I_{nk} \subset U$. Заметим, что концы отрезка $I_{nk} \subset U$ не выбрасываются при построении, поэтому пересечение $D \cap U$ содержит, по крайней мере, две различные точки. Таким образом, доказано, что точка $x \in D$ является предельной, и поэтому множество D совершенно.

Поскольку на $(n+1)$-ом шаге из отрезка $I_{nk} \subset U$ выбрасывается некоторый интервал, который затем не входит в множество D, то пересечение $U \cap ([0,1] \setminus D)$ содержит некоторый интервал. Так как выбор точки $x \in D$ и интервала U произвольны, то множество D нигде не плотно.

Чтобы найти меру множества D, достаточно найти сумму мер удаленных из отрезка $[0,1]$ дизъюнктных интервалов:

$$|[0,1] \setminus D| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot \frac{1-\delta}{3^k} = \frac{1-\delta}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-1} = 1 - \delta.$$

Следовательно, мера множества D равна $|D| = 1 - |[0,1] \setminus D| = \delta$.

Остается доказать утверждение про мощность. По известной теореме[2] всякое непустое совершенное множество имеет мощность континуума.

5.15. Предложение. *Рассмотрим произвольный отрезок J_n, полученный на n-ом шаге построения канторова множества положительной меры. Предел отношения меры удаляемого из J_n на последующих шагах открытого множества к мере J_n равен 0, когда $n \to \infty$.*

Доказательство. Действительно, длина одного отрезка J_n на n-ом шаге построения равна $\frac{1}{3^n} + \delta\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$. На последующих шагах построения из него удаляется счетная совокупность дизъюнктных интервалов, сумма мер которых равна

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \cdot \frac{1-\delta}{3^{i+n}} = \frac{1-\delta}{3^{n+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1-\delta}{3^n}.$$

Следовательно, предел отношения меры удаляемого из J_n на последующих шагах открытого множества к мере J_n равен

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\delta}{3^n}}{\frac{1}{3^n} + \delta\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\delta}{1 + \delta\left(\frac{3^n}{2^n} - 1\right)} = 0.$$

6. Элементарный интеграл

Фиксируем нормированное пространство $\mathbb{V}$, отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$, и произвольную конечно-аддитивную меру μ, определенную на промежутках из $[a,b]$.

6.1. Определение. Пусть $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$. *Элементарным интегралом* функции $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} c_i \chi_{\Delta_i}(x)$ по мере μ называется величина

$$\sum_{i=1}^{l} c_i \mu(\Delta_i) \in \mathbb{V},$$

[2] См. например *И. П. Натансон «Теория функция вещественной переменной». М.: Гостехиздат, 1957. С. 58.*

обозначаемая одним из следующих символов

$$\int_a^b \varphi\, d\mu, \quad \int_a^b \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Если мера μ определяется одним из возможных способов измеряющей функцией $\alpha(x)$, то интеграл будем обозначать символом

$$\int_a^b \varphi\, d\alpha, \quad \int_a^b \varphi(x)\, d\alpha(x).$$

В случае меры Лебега ($\alpha(x) \equiv x$) мы применяем любое из классических обозначений

$$\int_a^b \varphi\, dx, \quad \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Свойства элементарного интеграла

6.2. Корректность определения. *Элементарный интеграл ступенчатой функции определен корректно, т. е., не зависит от выбора представления ступенчатой функции в виде* $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} c_i \chi_{\Delta_i}(x)$, $c_i \in \mathbb{V}$.

Доказательство. Рассмотрим другое представление функции φ: $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} d_j \chi_{T_j}(x)$, где $\{T_j\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, а $d_j \in \mathbb{V}$. По следствию 3.3 существует измельчение, которое является подразбиением каждого из этих двух представлений: промежутками измельчения являются непустые пересечения $\Delta_i \cap T_j = P_{i,j}$. Получаем два соотношения

$$\varphi(x) = \sum_{i,j} c_{i,j} \chi_{P_{i,j}}(x) = \sum_{i,j} d_{i,j} \chi_{P_{i,j}}(x)$$

для функции φ, в которых $c_{i,j} = d_{i,j}$ при i и j таких, что $\Delta_i \cap T_j \neq \emptyset$.

Поскольку

$$\Delta_i = \bigcup_j \Delta_i \cap T_j \quad \text{и} \quad T_j = \bigcup_i \Delta_i \cap T_j,$$

то

$$\mu(\Delta_i) = \sum_j \mu(\Delta_i \cap T_j) \quad \text{и} \quad \mu(T_j) = \sum_i \mu(\Delta_i \cap T_j).$$

Отсюда

$$\int_a^b \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{l} c_i \mu(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}\mu(\Delta_i \cap T_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l} d_{ij}\mu(\Delta_i \cap T_j) = \sum_{j=1}^{k} d_j \mu(T_j).$$

6.3. Линейность. *Если* $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$, *то*

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \alpha \int_a^b \varphi\, d\mu + \beta \int_a^b \psi\, d\mu$$

для любых двух чисел $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$.

Для доказательства применить свойство 3.2.

6.4. Ограниченность. *Если* $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$, *то*

$$\left|\int_a^b \varphi\, d\mu\right| \le \int_a^b |\varphi|\, d\mu.$$

Здесь символ $|\cdot|$ *обозначает норму в пространстве* $\mathbb{V}$.

Доказательство. Пусть ступенчатая функция $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$ представима в виде конечной суммы $\sum\limits_i c_i \chi_{\Delta_i}$, $c_i \in \mathbb{V}$. Тогда

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\, d\mu(x)\right| = \left|\sum_i c_i \mu(\Delta_i)\right| \le \sum_i |c_i| \mu(\Delta_i) = \int_a^b |\varphi(x)|\, d\mu(x).$$

6.5. Определение. Говорят, что функции φ, $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *связаны отношением порядка*: $\varphi \le \psi$, если $\varphi(x) \le \psi(x)$ для всех точек $x \in [a,b]$.

6.6. Задача. Доказать свойство *монотонности интеграла*: если $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ и $\varphi \le \psi$, то

$$\int\limits_a^b \varphi\, d\mu \le \int\limits_a^b \psi\, d\mu.$$

В частности, если $0 \le \varphi$, то

$$0 \le \int\limits_a^b \varphi\, d\mu.$$

6.7. Определение. Пусть μ — произвольная конечно-аддитивная мера, определенная промежутках отрезка $[a,b]$. Рассмотрим произвольный промежуток $P = \langle c, d\rangle \subset [a,b]$. Пространство $\mathrm{Step}(P;\mathbb{V})$ ступенчатых функций на P состоит из всех функций $\varphi : P \to \mathbb{V}$ таких, что их продолжение $\tilde{\varphi}$ нулем на $[a,b]\setminus P$ принадлежит $\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$.

6.8. Определение. Пусть μ — произвольная конечно-аддитивная мера, определенная промежутках отрезка $[a,b]$. Рассмотрим произвольный промежуток $P = \langle c, d\rangle \subset [a,b]$. Интегралом функции $\varphi \in \mathrm{Step}(P;\mathbb{V})$ по мере μ на промежутке P называется величина

$$\int\limits_P \varphi(x)\, d\mu(x) = \int\limits_a^b \tilde{\varphi}(x)\, d\mu(x),$$

где $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ нулем на $[a,b]\setminus P$.

В частности, если $P = \{c\} \subset [a,b]$ — одноточечный промежуток, то

$$\int\limits_P \varphi(x)\, d\mu(x) = \varphi(c)\mu(c).$$

6.9. Задача. Сформулировать и доказать аналоги свойств 6.3 и 6.4 для интеграла по произвольному промежутку P.

6.10. Аддитивность элементарного интеграла. *Пусть μ — конечно-аддитивная мера, определенная на промежутках отрезка $[a,b]$. Для любых дизъюнктных промежутков P_1 и P_2 таких, что $P = P_1 \cup$*

P_2 — также промежуток, и любой ступенчатой функции $\varphi \in \mathrm{Step}(P;\mathbb{V})$ справедливо равенство

$$\int\limits_{P} \varphi(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{P_1} \varphi(x)\,d\mu(x) + \int\limits_{P_2} \varphi(x)\,d\mu(x).$$

Доказательство предоставляется читателю.

6.11. Задача. Обобщить свойство 6.10 на произвольную конечную дизъюнктную совокупность промежутков $\{P_i\}$ такую, что их объединение — также промежуток.

Из свойства 6.10 вытекают классические соотношения аддитивности, формулируемые ниже.

6.12. Определение. Для ступенчатой функции $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$ определим интеграл по *ориентированному* промежутку: для $a < b$ положим

$$\int\limits_{b}^{a} \varphi(x)\,d\mu(x) = -\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\,d\mu(x).$$

6.13. Аддитивность элементарного интеграла в случае специальных мер.

1) *Случай меры Лебега: $\alpha(x) \equiv x$. Для ступенчатой функции $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$ и любых чисел $\xi, \eta, \zeta \in [a,b]$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\xi}^{\zeta} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{\eta}^{\zeta} \varphi(x)\,dx.$$

2) *Пусть μ — мера определения 4.5. Для ступенчатой функции $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$ и любых чисел $\xi, \eta, \zeta \in [a,b]$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\xi}^{\zeta} \varphi(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,d\mu(x) + \int\limits_{\eta}^{\zeta} \varphi(x)\,d\mu(x).$$

6.14. Неравенство Чебышёва для ступенчатой функции. *Пусть $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ — ступенчатая функция, подчиненная разбиению $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a,b]$, и число $t > 0$. Тогда*

$$\sum_{i,\,|\varphi|_{\Delta_i}\geq t} \mu\left(\Delta_i\right) \leq \frac{1}{t}\int\limits_a^b \left|\varphi\left(x\right)\right| d\mu\left(x\right).$$

(Здесь и далее суммирование идет по всем i, для которых $|\varphi(x)| \geq t$ для всех $x \in \Delta_i$.)

Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$, равную t, если $|\varphi(x)| \geq t$, и нулю в остальных случаях. Тогда $\psi(x) \leq |\varphi(x)|$ на отрезке $[a,b]$, так что, используя задачу 6.6, имеем

$$\sum_{i,\,|\varphi|_{\Delta_i}\geq t} \mu\left(\Delta_i\right) = \frac{1}{t}\int\limits_a^b \psi\left(x\right) d\mu\left(x\right) \leq \frac{1}{t}\int\limits_a^b \left|\varphi\left(x\right)\right| d\mu\left(x\right).$$

7. Интегральная норма Дарбу

7.1. Определение. Фиксируем произвольный отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ с заданной на его промежутках конечно-аддитивной мерой μ. Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{B}([a,b];\mathbb{V})$, где символом $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{V})$ обозначается совокупность всех ограниченных функций, определенных на $[a,b]$ и принимающих значения в нормированном пространстве $\mathbb{V}$. *Интегральной нормой* (*Дарбу*) функции f называется число

$$\|f\| = \inf\left\{\int\limits_a^b \varphi(x)\,d\mu(x):\ |f(x)| \leq \varphi(x) \text{ для всех } x \in [a,b]\right\},$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$.

Из определения вытекает, что любая функция $f \in \mathcal{B}([a,b];\mathbb{V})$ имеет конечную интегральную норму.

Величина $\|f - g\|$ называется *интегральным отклонением* функции f от g. Иногда интегральная норма называется также *верхним интегралом* и обозначается символом $\int^* f\,d\mu$.

Свойства интегральной нормы *Пусть $f, g \in \mathcal{B}([a,b];\mathbb{V})$. Тогда*

7.2. $\|f\| \geq 0$; $\|f\| = 0$, *если* $f \equiv 0$ (*обратное неверно, привести пример*).

7.3. *Если* $|f(x)| \le |g(x)|$ *для всех* $x \in [a,b]$, *то* $\|f\| \le \|g\|$.

7.4. $\|cf\| = |c|\|f\|$ *для любой постоянной* $c \in \mathcal{K}$.

7.5. *Если* $f_i \in \mathcal{B}([a,b];\mathbb{V})$, $i = 1,\ldots,l$, *— конечный набор функций, то* $\left\|\sum\limits_{i=1}^{l} f_i\right\| \le \sum\limits_{i=1}^{l} \|f_i\|$.

7.6. *Если* $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{V})$, *то*

$$\|\varphi\| = \int\limits_a^b |\varphi(x)|\,d\mu(x) \quad \text{и} \quad \left|\int\limits_a^b \varphi(x)\,d\mu(x)\right| \le \|\varphi\|.$$

Доказательство. 7.2. Если $f \equiv 0$, то в качестве ступенчатой функции возьмем $\varphi \equiv 0$ в точках отрезка $[a,b]$.

7.3. Заметим, что если $|g(x)| \le \varphi(x)$ в точках отрезка $[a,b]$, то в тех же точках $|f(x)| \le \varphi(x)$. Поэтому нижняя грань в определении интегральной нормы для функции f берется по более широкому множеству и, следовательно, может быть только меньше $\|g\|$.

7.4. Если $c = 0$, то это свойство вытекает из свойства 7.2. В случае $c \ne 0$ имеем

$$\|cf\| = \inf\left\{\int\limits_a^b \varphi(x)\,d\mu(x) : \ |cf(x)| \le \varphi(x),\ \varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})\right\}$$

$$= \inf |c| \left\{\int\limits_a^b \frac{1}{|c|}\varphi(x)\,d\mu(x) : \ |f(x)| \le \frac{1}{|c|}\varphi(x),\ \varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})\right\}$$

$$= |c| \inf\left\{\int\limits_a^b \psi(x)\,d\mu(x) : \ |f(x)| \le \psi(x),\ \psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})\right\} = |c|\|f\|.$$

7.5. Достаточно рассмотреть две функции $f, g \in \mathcal{B}([a,b];\mathbb{V})$ и доказать $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Существуют ступенчатые функции $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ и $\psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такие, что

$$|f(x)| \le \varphi(x), \quad x \in [a,b], \qquad \int\limits_a^b \varphi(x)\, d\mu(x) \le \|f\| + \varepsilon/2,$$

$$|g(x)| \le \psi(x), \quad x \in [a,b], \qquad \int\limits_a^b \psi(x)\, d\mu(x) \le \|g\| + \varepsilon/2.$$

Отсюда получаем

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \varphi(x) + \psi(x), \quad x \in [a,b].$$

Поскольку сумма $\varphi(x)+\psi(x)$ — ступенчатая функция, то по определению нормы имеем

$$\|f+g\| \le \int\limits_a^b (\varphi(x)+\psi(x))\, d\mu(x) \le \|f\|+\varepsilon/2+\|g\|+\varepsilon/2 = \|f\|+\|g\|+\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, требуемое неравенство доказано. На произвольное конечное количество функций результат распространяется по индукции.

7.6. По определению 7.1 имеем

$$\|\varphi\| = \inf\left\{ \int\limits_a^b \psi(x)\, d\mu(x) : \ |\varphi(x)| \le \psi(x), \ \psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R}) \right\}.$$

С одной стороны, функция $\eta(x) = |\varphi(x)|$ принадлежит классу $\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ и поэтому

$$\|\varphi\| \le \int\limits_a^b \eta(x)\, d\mu(x),$$

а с другой стороны,

$$\int\limits_a^b \eta(x)\, d\mu(x) \le \int\limits_a^b \psi(x)\, d\mu(x)$$

для любой функции $\psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такой, что $\eta(x) = |\varphi(x)| \le \psi(x)$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b \eta(x)\, d\mu(x) \le \|\varphi\|.$$

Таким образом, первое утверждение из свойства 7.6 доказано. Второе свойство п. 7.6 доказано в п. 6.4

7.7. Задача. Завершить доказательство свойства 7.5: распространить по индукции свойство 7.5 интегральной нормы на произвольное конечное число слагаемых.

7.8. Задача. Доказать, что функции f и $|f|$ имеют одинаковые интегральные нормы.

7.9. Задача. Доказать, используя определение интегральной нормы, что интегральная норма характеристической функции ограниченного промежутка $\langle c, d\rangle \subset [a, b]$ равна мере $\mu(\langle c, d\rangle)$ этого промежутка: $\|\chi_{\langle c,d\rangle}\| = \mu(\langle c, d\rangle)$.

7.10. Задача. Чем интегральная норма в пространстве $\mathcal{B}([a, b]; \mathbb{V})$ отличается от нормы в нормированном пространстве?

7.11. Замечание. *Свойство* 7.5 *нельзя распространить на счетную совокупность слагаемых. Действительно, рассмотрим отрезок* $[0, 1]$ *с мерой Лебега на его промежутках и последовательность* $x_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, *рациональных точек этого отрезка. Пусть* f_n — *характеристическая функция множества* $\{x_1, \dots, x_n\}$. *С одной стороны,* $\|f_n\| = 0$, *а с другой стороны,* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[0,1]\cap Q}(x) = \chi(x)$ — *известная функция Дирихле, интегральная норма которой* $\|\chi\| = 1$. (*Проверить!*)

8. Пространство интегрируемых по конечно аддитивной мере функций. Интеграл Римана

Пусть $\mathbb{E}$ — банахово пространство, т. е., полное нормированное пространство. Это означает, что всякая фундаментальная последовательность $\{x_m\}$ элементов этого пространства сходится к некоторому элементу $x \in \mathbb{E}$. Напомним, что последовательность $x_m \in \mathbb{E}$, $m \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех номеров $n, m \geq n_0$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$. Последовательность $x_m \in \mathbb{E}$ *сходится* к элементу $x \in \mathbb{E}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех номеров $n \geq n_0$ справедливо неравенство $|x - x_n| \leq \varepsilon$.

8.1. Определение 1. *Фиксируем отрезок* $[a,b]$ *и конечно-аддитивную меру* μ, *определенную на промежутках этого отрезка. Функция* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ *называется интегрируемой по мере* μ, *если существует такая последовательность* $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$, $n \in \mathbb{N}$, *что* $\|f - \varphi_n\| \to 0$ *при* $n \to \infty$. *В силу оценок*

$$\left|\int_a^b \varphi_n \, d\mu - \int_a^b \varphi_m \, d\mu\right| \leq \int_a^b |\varphi_n - \varphi_m| \, d\mu$$
$$= \|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \|f - \varphi_n\| + \|f - \varphi_m\|,$$

последовательность интегралов $\int_a^b \varphi_n \, d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, *фундаментальна в банаховом пространстве* $\mathbb{E}$. *Поэтому существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \, d\mu \in \mathbb{E},$$

который называется интегралом функции f *по мере* μ *и обозначается символом* $\int_a^b f(x) \, d\mu(x)$ *или* $\int_a^b f \, d\mu$.

Для корректности приведенного понятия требуется проверить следующие свойства.

8.2. Свойство 1. *Значение интеграла* $\int_a^b f \, d\mu$ *не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности* φ_n *ступенчатых функций.*

Доказательство. Действительно, пусть мы имеем две последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ такие, что одновременно $\|f - \varphi_n\| \to 0$ и $\|f - \psi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. В силу оценок

$$\left|\int_a^b \varphi_n \, d\mu - \int_a^b \psi_n \, d\mu\right| \leq \int_a^b |\varphi_n - \psi_n| \, d\mu$$
$$= \|\varphi_n - \psi_n\| \leq \|f - \varphi_n\| + \|f - \psi_n\|$$

последовательности интегралов $\int_a^b \varphi_n \, d\mu$ и $\int_a^b \psi_n \, d\mu$ сходятся к одному и тому же пределу.

8.3. Свойство 2. *Для функций класса* $\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ *«новый» интеграл совпадает с элементарным интегралом.*

Доказательство. Действительно, если $f \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$, то в качестве аппроксимирующей последовательности ступенчатых функций достаточно рассмотреть $\varphi_n = f$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Совокупность интегрируемых по конечно-аддитивной мере μ функций обозначается символом $\mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$.

8.4. Определение 2. *Если* $\alpha(x) \equiv x$, *то получаемый интеграл называется* интегралом Римана *и обозначается символом* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, *а совокупность интегрируемых по Риману функций обозначается символом* $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$.

Из определения вытекает, что всякая интегрируемая по мере μ функция ограничена. Таким образом, справедливо

8.5. Свойство 3 (Необходимое условие интегрируемости). *Всякое интегрируемая функция ограничена:* $\mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E}) \subset \mathcal{B}([a,b];\mathbb{E})$.

8.6. Лемма. *Определение интегрируемой по мере* μ *функции эквивалентно следующему: функция* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ *интегрируема по мере* μ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют функции* $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ *и* $\psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ *такие, что*

$$|f(x) - \varphi(x)| \le \psi(x) \quad \textit{и} \quad \int\limits_a^b \psi(x)\,d\mu(x) < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем достаточность. Выберем для каждого $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ функции $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$, удовлетворяющие приведенным неравенствам с ε_n вместо ε. Получаем последовательность $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$, $n \in \mathbb{N}$, такую, что $\|f - \varphi_n\| < \varepsilon_n$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\| = 0$ и поэтому $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$.

Предлагается проверить, что верно и обратное утверждение.

Введем понятие *срезки* в банаховом пространстве $\mathbb{E}$. Если $h \in \mathbb{E}$, то положим

$$\operatorname{sign} h = \begin{cases} 0 \in \mathbb{E}, & \text{если } |h| = 0,\\ \frac{h}{|h|}, & \text{если } |h| \ne 0. \end{cases}$$

Пусть $M \in \mathbb{R}$, $0 \leq M$, и $g : [a,b] \to \mathbb{E}$. Определим срезку по формуле
$$\operatorname{cut}(M,g)(x) = \min(M,|g(x)|)\operatorname{sign} g(x).$$
Непосредственно проверяется, что $|\operatorname{cut}(M,g)(x)| \leq M$ для всех $x \in [a,b]$. Если g — ступенчатая функция, то ее срезка — также ступенчатая функция.

8.7. Замечание. *Последовательность ступенчатых функций $\varphi_n \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{E})$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к функции f в интегральной норме, можно выбрать равномерно ограниченной, т. е., такой, что $|\varphi_n(x)| \leq C$ для всех $x \in [a,b]$ и $n \in \mathbb{N}$, где C —некоторая постоянная.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ ограничена, то $|f(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$, для некоторой постоянной M. Пусть в некоторой точке $x \in [a,b]$ одновременно выполняются два неравенства $|f(x)| \leq M$ и $2M \leq |\varphi_n(x)|$. Тогда в этой же точке
$$M = 2M - M \leq \big||\varphi_n(x)| - |f(x)|\big| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| \quad \text{и}$$
$$|\operatorname{cut}(2M,\varphi_n)(x) - f(x)| \leq |\operatorname{cut}(2M,\varphi_n)(x)| + |f(x)| \leq 3M.$$
Отсюда вытекает оценка
$$|\operatorname{cut}(2M,\varphi_n)(x) - f(x)| \leq 3|\varphi_n(x) - f(x)|$$
для всех точек $x \in [a,b]$. Таким образом, последовательность ступенчатых функций $\psi_n(x) = \operatorname{cut}(2M,\varphi_n)(x)$ обладает следующими свойствами: $\psi_n(x) \leq 2M$ для всех $x \in [a,b]$ и $\|f - \psi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Свойства интеграла

Формулируемые ниже свойства интегрируемых функций можно доказать предельным переходом из соответствующих свойств для ступенчатых функций.

8.8. Линейность. *Если $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$, где $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ — конечная совокупность интегрируемых функций, а $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathcal{K}$ — конечная совокупность постоянных, то функция f интегрируема, т. е., $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$, и*
$$\int\limits_a^b f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int\limits_a^b f_k\,d\mu.$$

Доказательство. Для каждой функции f_k существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_{k,m}$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что $\|f_k - \varphi_{k,m}\| \to 0$ при $m \to \infty$. Положим $\psi_m = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{k,m}$. Тогда ψ_m — ступенчатая функция и

$$\|f - \psi_m\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \|f_k - \varphi_{k,m}\|.$$

Отсюда вытекает, что $\|f - \psi_m\| \to 0$ при $m \to \infty$. Кроме того,

$$\int\limits_a^b f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_a^b \psi_m\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lim_{m\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_{k,m}\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int\limits_a^b f_k\,d\mu.$$

8.9. Ограниченность. *Если* $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$, *то* $|f| \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$ *и*

$$\left|\int\limits_a^b f\,d\mu\right| \leq \int\limits_a^b |f|\,d\mu = \|f\|.$$

Доказательство. Для функции f существует последовательность ступенчатых функций φ_m, $m \in \mathbb{N}$, такая, что $\|f - \varphi_m\| \to 0$ при $m \to \infty$. Поскольку, в силу неравенства треугольника, $\big||f(x)| - |\varphi_m(x)|\big| \leq |f(x) - \varphi_m(x)|$, то $\big\||f| - |\varphi_m|\big\| \to 0$ при $m \to \infty$. Так как $|\varphi_m| \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$, то $|f| \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$ и

$$\left|\int\limits_a^b f\,d\mu\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_a^b \varphi_m\,d\mu\right| \leq \lim_{m\to\infty} \int\limits_a^b |\varphi_m|\,d\mu = \int\limits_a^b |f|\,d\mu.$$

Далее, $\|f - \varphi_m\| \to 0$ при $m \to \infty$, поэтому из неравенства треугольника имеем $\|f\| = \lim\limits_{m\to\infty} \|\varphi_m\| = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_a^b |\varphi_m|\,d\mu = \int\limits_a^b |f|\,d\mu$.

8.10. Задача. Найти пример функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, для которой $|f| \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$, а $f \notin \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$.

8.11. Задача. Если $f, g \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$ и $f \leq g$, то $\int\limits_a^b f\,d\mu \leq \int\limits_a^b g\,d\mu$.

8.12. Оценки для интеграла.

Формулируемые ниже оценки вытекают из свойств 8.9 и 8.11.

(1) Если $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ и $|f(x)| \leq M$ для всех точек отрезка $[a,b]$, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)\right| \leq M\mu([a,b]).$$

(2) Если $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$, $m \leq f(x) \leq M$ для всех точек отрезка $[a,b]$, и $g \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$, причем $g(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то

$$m\int\limits_a^b g(x)\,d\mu(x) \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\,d\mu(x) \leq M\int\limits_a^b g(x)\,d\mu(x).$$

В частности, если $g \equiv 1$, то

$$m\mu([a,b]) \leq \int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) \leq M\mu([a,b]).$$

8.13. Задача. Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ принимает постоянное значение $h \in \mathbb{E}$ на промежутке $\langle c,d\rangle \subset [a,b]$ и равна нулю на $[a,b] \setminus \langle c,d\rangle$, то она интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) = \mu(\langle c,d\rangle)\cdot h$.

8.14. Задача. Если $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ и отрезок $[c,d] \subset [a,b]$, то $f \in \mathcal{R}_\mu([c,d];\mathbb{E})$. (Применить задачу 3.10.)

Свойства аддитивности интеграла

8.15. Определение. Пусть μ — произвольная конечно-аддитивная мера, определенная на промежутках отрезка $[a,b]$. Пусть $P = \langle c,d\rangle$ — произвольный промежуток. Функция $f : P \to \mathbb{E}$ называется *интегрируемой по мере μ на промежутке P* ($f \in \mathcal{R}_\mu(P;\mathbb{E})$), если функция

$$[a,b] \ni x \mapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in P, \\ 0, & \text{если } x \in [a,b] \setminus P, \end{cases}$$

интегрируема по мере μ на отрезке $[a,b]$. Интеграл функции f по промежутку P определяется следующим образом:

$$\int\limits_P f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)\,d\mu(x).$$

8.16. Задача. Доказать, что значение интеграла $\int\limits_P f(x)\,d\mu(x)$ не зависит от выбора объемлющего промежутка $[a,b]\supset P$.

8.17. Свойство аддитивности. *Пусть μ — конечно-аддитивная мера, определенная на промежутках отрезка $[a,b]$. Пусть промежуток P совпадает с объединением дизъюнктных промежутков P_1 и P_2. Если $f\in\mathcal{R}_\mu(P_1;\mathbb{E})$ и $f\in\mathcal{R}_\mu(P_2;\mathbb{E})$, то $f\in\mathcal{R}_\mu(P;\mathbb{E})$ и справедливо соотношение*

$$\int\limits_P f(x)\,d\mu(x)=\int\limits_{P_1} f(x)\,d\mu(x)+\int\limits_{P_2} f(x)\,d\mu(x). \tag{8.1}$$

Обратно, если существует интеграл в левой части, то существуют также интегралы и в правой части, и справедливо равенство (8.1).

Доказательство. Пусть существуют интегралы в правой части. Так как $f\in\mathcal{R}_\mu(P_1;\mathbb{E})$ $(f\in\mathcal{R}_\mu(P_2;\mathbb{E}))$, то лемме 8.6 существуют две последовательности ступенчатых функций: $\varphi_{1,n}\in\operatorname{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_{1,n}\in\operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$ $(\varphi_{2,n}\in\operatorname{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_{2,n}\in\operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R}))$, $n\in\mathbb{N}$, такие, что

$$|\tilde f(x)-\varphi_{1,n}(x)|\le\psi_{1,n}(x),\ x\in[a,b],\quad\text{и}\quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b\psi_{1,n}(x)\,d\mu(x)=0$$

$$\left(|\tilde f(x)-\varphi_{2,n}(x)|\le\psi_{2,n}(x),\ x\in[a,b],\quad\text{и}\quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b\psi_{2,n}(x)\,d\mu(x)=0\right)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b\varphi_{i,n}(x)\,d\mu(x)=\int\limits_{P_i} f(x)\,d\mu(x),\quad i=1,2.$$

Очевидно, что можно полагать $\varphi_{1,n}(x)=0$ и $\psi_{1,n}(x)=0$ для всех точек $x\notin P_1$ $(\varphi_{2,n}(x)=0$ и $\psi_{2,n}(x)=0$ для всех точек $x\notin P_2)$, $n\in\mathbb{N}$. Определим теперь на отрезке $[a,b]$ две последовательности ступенчатых функций

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\varphi_{1,n}(x), & \text{если } x\in P_1,\\ \varphi_{2,n}(x), & \text{если } x\in P_2,\\ 0, & \text{если } x\notin P,\end{cases}\quad\text{и}\quad \psi_n(x)=\begin{cases}\psi_{1,n}(x), & \text{если } x\in P_1,\\ \psi_{2,n}(x), & \text{если } x\in P_2,\\ 0, & \text{если } x\notin P.\end{cases}$$

При таком определении имеем

$$|\tilde f(x) - \varphi_n(x)| \le \psi_n(x),\ x \in [a,b], \quad \text{и, в силу п. 6.10,}$$
$$\int\limits_P \psi_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{P_1} \psi_{1,n}(x)\,d\mu(x) + \int\limits_{P_2} \psi_{2,n}(x)\,d\mu(x) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Таким образом, $f \in \mathcal{R}_\mu(P;\mathbb{E})$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_P f(x)\,d\mu(x).$$

Следовательно, переходя в равенстве

$$\int\limits_P \varphi_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{P_1} \varphi_{1,n}(x)\,d\mu(x) + \int\limits_{P_2} \varphi_{2,n}(x)\,d\mu(x)$$

к пределу при $n \to \infty$, получаем (8.1).

Предлагается обратить вышеприведенные рассуждения: из существования интеграла в левой части (8.1) получить существование интегралов справа и доказать равенство.

8.18. Задача. Обобщить свойство 8.17 на конечное число промежутков: если μ — конечно-аддитивная мера на отрезке $[a,b]$, $P_1, P_2, \ldots, P_k \subset [a,b]$ — дизъюнктная система промежутков такая, что их объединение $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ — промежуток, а $f \in \mathcal{R}_\mu(P_i;\mathbb{E})$, то $f \in \mathcal{R}_\mu(Q;\mathbb{E})$ для любого i и

$$\int\limits_Q f(x)\,d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{P_i} f(x)\,d\mu(x).$$

Верно также и обратное: из существования интеграла в левой части равенства вытекает существование интегралов в правой части и обе части совпадают.

8.19. Задача. Сформулировать и доказать аналоги свойства 8.17 и задачи 8.18 для функций класса $\mathcal{R}(P;\mathbb{E})$.

Заметим, что для функций, интегрируемых по Риману, свойство аддитивности п. 8.17 может быть записано в несколько ином виде.

8.20. Определение. Для $a < b$ и $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$ положим

$$\int\limits_b^a f(x)\,d\mu(x) = -\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x).$$

8.21. Свойство аддитивности для интеграла Римана. *Пусть μ — мера Лебега (измеряющая функция $\alpha(x) \equiv x$). Пусть даны три числа $\xi, \eta, \zeta \in [a,b]$. Если $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$, то справедливо соотношение*

$$\int\limits_\xi^\zeta f(x)\,dx = \int\limits_\xi^\eta f(x)\,dx + \int\limits_\eta^\zeta f(x)\,dx. \tag{8.2}$$

8.22. Задача. Сформулировать и доказать аналог свойства 8.21 для функций класса $\mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ при условии, что $\mu(x) = 0$ для любой точки $x \in [a,b]$.

8.23. Задача. Пусть μ — произвольная конечно-аддитивная мера, заданная на промежутках отрезка $[a,b]$. Получить из свойства 8.17, что если $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$, то $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b);\mathbb{E})$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_P f(x)\,d\mu(x) + \int\limits_b^b f(x)\,d\mu(x),$$

где $P = [a,b)$. Проверить, что

$$\int\limits_b^b f(x)\,d\mu(x) = f(b)\mu(b).$$

8.24. Задача. Пусть μ — произвольная конечно-аддитивная мера, заданная на промежутках отрезка $[a,b]$. Получить из свойства 8.17, что для трех действительных числа $a < c \le b$ справедливо соотношение

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_P f(x)\,d\mu(x) + \int\limits_c^b f(x)\,d\mu(x), \quad P = [a,c), \tag{8.3}$$

при условии, что $f \in \mathcal{R}_\mu([a,c);\mathbb{E})$ и $f \in \mathcal{R}_\mu([c,b];\mathbb{E})$. Верно также и обратное: из существования интеграла в левой части равенства вытекает существование интегралов в правой части и обе части совпадают.

В каких случаях справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_a^c f(x)\,d\mu(x) + \int\limits_c^b f(x)\,d\mu(x)?$$

8.25. Задача. Если $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$, а $g \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathcal{K})$, то произведение $g \cdot f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ (здесь $\mathcal{K}$ — поле скаляров пространства $\mathbb{E}$). Обратное неверно.

Схема решения. Пусть $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathcal{K})$, $n \in \mathbb{N}$, — две последовательности функций такие, что $\|f - \varphi_n\| \to 0$ и $\|g - \psi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. В силу замечания 8.7, эти последовательности можно считать равномерно ограниченными, т. е., $|\varphi_n(x)| \le M$ и $|\psi_n(x)| \le M$ для всех $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, и $|f(x)| \le M$ и $|g(x)| \le M$, M — постоянная. Поэтому

$$\|gf - \psi_n\varphi_n\| \le \|gf - g\varphi_n\| + \|g\varphi_n - \psi_n\varphi_n\| \le M\|f - \varphi_n\| + M\|g - \psi_n\|,$$

откуда вытекает, что $gf \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$.

Функции, интегральная норма которых равна нулю

8.26. Определение. Будем говорить, что *функция равна нулю почти всюду относительно меры* μ (*μ-почти всюду*), если множество точек на $[a,b]$, где она отлична от нуля, имеет нулевую μ-меру.

Заметим, что всякая ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция, интегральная норма которой равна нулю, интегрируема и ее интеграл равен нулю. (Проверить!)

8.27. Теорема. *Если $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ и $\|f\| = \int\limits_a^b |f(x)|\,d\mu(x) = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду относительно меры μ.*

Доказательство. Очевидно $\{x \in [a,b] : |f(x)| > 0\} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = \{x \in [a,b] : |f(x)| > n^{-1}\}$. Поэтому достаточно доказать, что $\mu(A_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Фиксируем номер $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\|f\| = 0$, то существует последовательность $\varphi_l \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$, $l \in \mathbb{N}$, ступенчатых функций такая, что $|f(x)| \leq \varphi_l(x)$ для всех $x \in [a,b]$ и $\|\varphi_l\| \to 0$ при $l \to \infty$. Следовательно, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $n\|\varphi_m\| < \varepsilon$. Пусть $\{\Delta_i\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$ (зависящее от m), которому подчинена ступенчатая функция φ_m. Заметим, что, с одной стороны,

$$A_n \subset \bigcup_{i,\,|\varphi_m|_{\Delta_i} \geq n^{-1}} \Delta_i.$$

С другой стороны, в силу неравенства Чебышёва для ступенчатых функций, имеем

$$\sum_{i,\,|\varphi_m|_{\Delta_i} \geq n^{-1}} \mu(\Delta_i) \leq n \int\limits_a^b \varphi_m(x)\,d\mu(x) < \varepsilon.$$

Поэтому $\mu(A_n) = 0$, так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым.

8.28. Задача. Привести контрпример к утверждению, обратному к 8.27: функция может быть ограниченной и равной нулю почти всюду и не быть интегрируемой.

Свойство замкнутости пространства интегрируемых функций

Цель настоящего раздела — установить замкнутость пространства $\mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ интегрируемых функций относительно сходимости по интегральной норме.

8.29. Определение. Будем говорить, что последовательность функций $f_n \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ *сходится к функции* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ *в интегральной норме*, если

$$\|f - f_n\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Заметим, что если последовательность функций $f_n \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ сходится к функции $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ в интегральной норме, то имеем $\|f_m - f_n\| \leq \|f - f_m\| + \|f - f_n\| \to 0$ при $m,n \to \infty$. Отсюда и из свойства ограниченности интеграла, см. п. 8.9,

$$\left|\int\limits_a^b f_m(x)\,d\mu(x) - \int\limits_a^b f_n(x)\,d\mu(x)\right| \leq \|f_m - f_n\|$$

имеем сходимость последовательности интегралов в $\mathbb{E}$: существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,d\mu(x)\in\mathbb{E}. \tag{8.4}$$

Мы докажем, что $f\in\mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ и значение интеграла функции f по мере μ равно пределу (8.4).

8.30. Теорема. *Пусть последовательность функций $f_n\in\mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ сходится к функции $f:[a,b]\to\mathbb{E}$ в интегральной норме. Тогда*

1) $f\in\mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,d\mu(x)=\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)$.

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. По определению интегральной нормы существует последовательность $\psi_n\in\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такая, что

$$|f(x)-f_n(x)|\le\psi_n(x),\ x\in[a,b],\ n\in\mathbb{N},\ \text{и}\ \int\limits_a^b\psi_n\,d\mu\to 0\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Отсюда вытекает, что f ограничена: $|f(x)|\le|f_n(x)|+\psi_n(x)$ для любого $x\in[a,b]$ при фиксированном $n\in\mathbb{N}$. Из условия теоремы вытекает также, что для любого $n\in\mathbb{N}$ существуют ступенчатые функции $\varphi_n\in\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\eta_n\in\mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такие, что

$$|f_n(x)-\varphi_n(x)|\le\eta_n(x),\ x\in[a,b],\ n\in\mathbb{N},\ \text{и}\ \int\limits_a^b\eta_n\,d\mu\to 0\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Из вышесказанного следует, что

$$|f(x)-\varphi_n(x)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-\varphi_n(x)|\le\psi_n(x)+\eta_n(x)$$

при всех $x\in[a,b]$ и $n\in\mathbb{N}$, и, кроме того,

$$\int\limits_a^b(\psi_n(x)+\eta_n(x))\,d\mu(x)\to 0\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Таким образом, функция f интегрируема по мере μ на отрезке $[a, b]$. Следовательно, по свойству ограниченности интеграла п. 8.9 имеем

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) - \int\limits_a^b f_n(x)\,d\mu(x)\right| \leq \|f - f_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что и доказывает второе утверждение теоремы.

Докажем следующий признак сходимости по интегральной норме.

8.31. Теорема. *Пусть μ — произвольная конечно-аддитивная мера, заданная на промежутках отрезка $[a, b]$, а функция $f : [a, b] \to \mathbb{E}$ определена на отрезке $[a, b]$. Если существуют последовательности функций $f_n \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$ и $u_n \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{R})$ такие, что*

$$|f(x) - f_n(x)| \leq u_n(x) \text{ при всех } x \in [a, b] \text{ и } \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,d\mu(x) = 0,$$

то

1) $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)$.

Доказательство. Мы докажем, что из условий теоремы можно получить условия теоремы 8.30. Для функции u_n, интегрируемой по Риману, существуют функции $\eta_n \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{R})$ и $\theta_n \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{R})$ такие, что

$$|u_n(x) - \eta_n(x)| \leq \theta_n(x),\ x \in [a, b], \text{ и } \int\limits_a^b \theta_n(x)\,d\mu(x) \leq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем $u_n(x) \leq |u_n(x) - \eta_n(x)| + \eta_n(x) \leq \theta_n(x) + \eta_n(x)$ для всех $x \in [a, b]$ и

$$\int\limits_a^b |\eta_n(x)|\,d\mu(x) \leq \int\limits_a^b u_n(x)\,d\mu(x) + \int\limits_a^b |u_n(x) - \eta_n(x)|\,d\mu(x)$$

$$\int\limits_a^b u_n(x)\,d\mu(x) + \int\limits_a^b \theta_n(x)\,d\mu(x) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Окончательно имеем

$$|f(x) - f_n(x)| \le u_n(x) \le \theta_n(x) + \eta_n(x)$$

для всех $x \in [a, b]$ и $n \in \mathbb{N}$ и $\int\limits_a^b (\eta_n(x)+\theta_n(x))\, d\mu(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку $\eta_n(x)+\theta_n(x) \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{R})$, то по определению интегральной нормы $\|f - f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому по теореме 8.30 функция f интегрируема по мере μ и

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, d\mu(x).$$

Теорема доказана.

Принцип субординации

Среди всех конечно-аддитивных мер, определенных на промежутках P отрезка $[a, b]$ существует естественный частичный порядок.

8.32. Определение. Будем говорить, что конечно-аддитивная мера μ *не превосходит* конечно-аддитивной меры ν на отрезке $[a, b]$ и писать $\mu \le \nu$, если $\mu(P) \le \nu(P)$ для любого промежутка P на отрезке $[a, b]$.

8.33. Задача. Показать, что данное в определении отношение порядка между конечно-аддитивными мерами обладает всеми свойствами частичного порядка.

Следующий результат говорит о том, что функция наследует свойство интегрируемости относительно установленного порядка.

8.34. Теорема. *Пусть конечно-аддитивная мера μ не превосходит конечно-аддитивной меры ν на отрезке $[a, b]$, а $f \in \mathcal{R}_\nu([a, b]; \mathbb{E})$. Тогда $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$ и*

$$\int\limits_a^b |f(x)|\, d\mu(x) \le \int\limits_a^b |f(x)|\, d\nu(x). \tag{8.5}$$

Доказательство. В соответствии с определением интегрируемости существуют последовательности ступенчатых функций $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такие, что

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \le \psi_n(x) \text{ для } x \in [a,b] \text{ и } n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(x)\, d\nu(x) = 0.$$

Непосредственно промеряется, что отношение порядка между мерами приводит к неравенству между интегралами:

$$\int\limits_a^b \psi_n(x)\, d\mu(x) \le \int\limits_a^b \psi_n(x)\, d\nu(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Из вышесказанного вытекает $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(x)\, d\nu(x) = 0$. Следовательно, по определению интегрируемости $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\, d\mu(x).$$

Поскольку $\int\limits_a^b \varphi_n(x)\, d\mu(x) = \int\limits_a^b \varphi_n(x)\, d\nu(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то

$$\int\limits_a^b |f(x)|\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b |\varphi_n(x)|\, d\mu(x)$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b |\varphi_n(x)|\, d\nu(x) = \int\limits_a^b |f(x)|\, d\nu(x).$$

8.35. Определение. Будем говорить, что конечно-аддитивная мера ν *равна сумме* двух конечно-аддитивных мер μ_1 и μ_2 на отрезке $[a,b]$ и писать $\mu = \mu_1 + \mu_2$, если $\nu(P) = \mu_1(P) + \mu_2(P)$ для любого промежутка $P \subset [a,b]$.

8.36. Задача. Показать, что сумма двух конечно-аддитивных мер на отрезке $[a,b]$ является конечно-аддитивной мерой.

8.37. Задача. Показать, что если $\nu(P) = \mu_1 + \mu_2$ на промежутках отрезка $[a, b]$, то $\mu_1 \le \nu$ и $\mu_2 \le \nu$.

8.38. Теорема. *Пусть* $\nu = \mu_1 + \mu_2$ *на промежутках отрезка* $[a, b]$, *а* $f \in \mathcal{R}_\nu([a, b]; \mathbb{E})$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}_{\mu_i}([a, b]; \mathbb{E})$, $i = 1, 2$, *и*

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\nu(x) = \int\limits_a^b f(x)\,d\mu_1(x) + \int\limits_a^b f(x)\,d\mu_2(x). \qquad (8.6)$$

Обратно, если $f \in \mathcal{R}_{\mu_i}([a, b]; \mathbb{E})$, $i = 1, 2$, *то* $f \in \mathcal{R}_\nu([a, b]; \mathbb{E})$, *где* $\nu = \mu_1 + \mu_2$, *и справедливо равенство* (8.6).

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{R}_\nu([a, b]; \mathbb{E})$. Имеем $\nu = \mu_1 + \mu_2$. Следовательно, из задачи 8.37 и теоремы 8.34 вытекает, что $f \in \mathcal{R}_{\mu_i}([a, b]; \mathbb{E})$, $i = 1, 2$. Если $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{R})$ — такие последовательности ступенчатых функций, что

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \le \psi_n(x) \text{ для } x \in [a, b] \text{ и } n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(x)\,d\nu(x) = 0,$$

то имеем также

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(x)\,d\mu_i(x) = 0, \ i = 1, 2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu_i(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu_i(x), \ i = 1, 2.$$

Поскольку $\int\limits_a^b f(x)\,d\nu(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\nu(x)$, то (8.6) получается из просто проверяемого равенства для ступенчатых функций

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\nu(x) = \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu_1(x) + \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu_2(x) \qquad (8.7)$$

как предел при $n \to \infty$.

Обратно, пусть теперь $f \in \mathcal{R}_{\mu_i}([a,b];\mathbb{E})$. Тогда существуют последовательности ступенчатых функций $\varphi_n^{(i)} \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_n^{(i)} \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такие, что

$$|f(x)-\varphi_n^{(i)}(x)| \le \psi_n^{(i)}(x) \text{ для } x \in [a,b] \text{ и } n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n^{(i)}(x)\,d\mu_i(x) = 0,$$

$i = 1, 2$. Положим $\varphi_n = \frac{1}{2}\big(\varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)}\big)$ и $\psi_n = \frac{1}{2}\big(\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}\big)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi_n(x)| &\le \frac{1}{2}\Big|\big(f(x) - \varphi_n^{(1)}(x)\big) + \big(f(x) - \varphi_n^{(2)}(x)\big)\Big| \\ &\le \frac{1}{2}\Big(\big|\big(f(x) - \varphi_n^{(1)}(x)\big| + \big|f(x) - \varphi_n^{(2)}(x)\big)\big|\Big) \le \frac{1}{2}\big(\psi_n^{(1)}(x) + \psi_n^{(2)}(x)\big) \\ &\le \psi_n(x) \text{ для } x \in [a,b] \text{ и } n \in \mathbb{N}, \text{ и} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(x)\,d\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\bigg(\int\limits_a^b \psi_n^{(1)}(x)\,d\mu_1(x) + \int\limits_a^b \psi_n^{(2)}(x)\,d\mu_2(x) \bigg) = 0.$$

По определению интегрируемости отсюда вытекает $f \in \mathcal{R}_\nu([a,b];\mathbb{E})$. Далее, из (8.7) предельным переходом при $n \to \infty$ получаем (8.6).

9. Классические критерии интегрируемости

9.1. Определение. Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, заданная на произвольном множестве M. *Колебанием функции f на множестве M* называется величина

$$\operatorname{osc}(f;M) = \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} f(x).$$

9.2. Свойство. *Нетрудно проверить, что колебание можно найти несколько другим способом:*

$$\operatorname{osc}(f;M) = \sup_{x,y\in M} |f(x) - f(y)|.$$

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть случай $\operatorname{osc}(f;M) > 0$. Если $f(x) > f(y)$, то $0 < f(x) - f(y) \le \sup\limits_{z\in M} f(z) - \inf\limits_{z\in M} f(z)$, откуда

$$\sup_{x,y\in M} |f(x) - f(y)| \le \sup_{z\in M} f(z) - \inf_{z\in M} f(z) = \operatorname{osc}(f;M).$$

С другой стороны, для фиксированного $0 < \varepsilon < \operatorname{osc}(f; M)$ существуют $x, y \in M$ такие, что $f(x) > \sup\limits_{z \in M} f(z) - \varepsilon/2$ и $f(y) < \inf\limits_{z \in M} f(z) + \varepsilon/2$. Отсюда

$$\sup_{z \in M} f(z) - \inf_{z \in M} f(z) - \varepsilon < |f(x) - f(y)|$$

и поэтому

$$\operatorname{osc}(f; M) = \sup_{z \in M} f(z) - \inf_{z \in M} f(z) < \sup_{x,y \in M} |f(x) - f(y)| + \varepsilon.$$

Так как ε — произвольное число, то утверждение 9.2 доказано.

Преимущество определения 9.2 колебания состоит в том, что оно применимо для функций со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{E}$: для функции $f : M \to \mathbb{E}$ полагаем колебание на M равным

$$\operatorname{osc}(f; M) = \sup_{x,y \in M} |f(x) - f(y)|.$$

9.3. Свойство. *Если $M_1 \subset M_2 \subset M$, функция $f : M \to \mathbb{E}$ задана на M, то*

$$\operatorname{osc}(f; M_1) \leq \operatorname{osc}(f; M_2).$$

Доказательство предоставляется читателю.

9.4. Определение. Рассмотрим функцию $f : A \to \mathbb{E}$, определенную на числовом множестве $A \subset \mathbb{R}$. *Колебанием функции f в точке* $x \in A$ называется величина

$$\operatorname{osc}(f; x) = \lim_{r \to 0+} \operatorname{osc}(f; A \cap (x - r, x + r)).$$

Правым колебанием функции f в точке $x \in A$ называется величина

$$\operatorname{osc}_+(f; x) = \lim_{r \to 0+} \operatorname{osc}(f; A \cap (x, x + r)).$$

Левым колебанием функции f в точке $x \in A$ называется величина

$$\operatorname{osc}_-(f; x) = \lim_{r \to 0+} \operatorname{osc}(f; A \cap (x - r, x)).$$

9.5. Замечание 1. *Колебание* $\operatorname{osc}(f; x)$ *функции f в точке x не следует путать с колебанием* $\operatorname{osc}(f; \{x\})$ *функции f на одноточечном множестве $M = \{x\}$. Последнее, в силу определения* 9.1, *всегда равно нулю.*

9.6. Замечание 2. *Пусть функция* $f : [a, b] \to \mathbb{E}$ *определена на отрезке* $[a, b]$, $P = \langle\alpha, \beta\rangle \subset [a, b]$ *— произвольный промежуток. Тогда*

1) *если* x *— внутренняя точка промежутка* P, *то* $\operatorname{osc}(f; x) \leq \operatorname{osc}(f; P)$;

2) *если* $x = \alpha$ *— левый конец промежутка* P, *то* $\operatorname{osc}_+(f; \alpha) \leq \operatorname{osc}(f; P)$;

3) *если* $x = \beta$ *— правый конец промежутка* P, *то* $\operatorname{osc}_-(f; \beta) \leq \operatorname{osc}(f; P)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе и третье доказываются по аналогии. Действительно, по определению 9.4 колебания функции в точке x и свойству 9.3, для любого интервала $U(x)$ имеем $\operatorname{osc}(f; x) \leq \operatorname{osc}(f; U(x))$. Поскольку x — внутренняя точка промежутка P, то существует интервал $V(x) \subset P$. Для такого интервала по свойству 9.3 получаем $\operatorname{osc}(f; x) \leq \operatorname{osc}(f; V(x)) \leq \operatorname{osc}(f; P)$.

Если x — граничная точка промежутка P, то существуют функции, для которых $\operatorname{osc}(f; x) > \operatorname{osc}(f; P)$. Привести примеры!

9.7. Свойство. 1) *Функция* $f : A \to \mathbb{E}$ *непрерывна в точке* $x \in A$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{osc}(f; x) = 0$.

2) *Функция* $f : A \to \mathbb{E}$ *имеет предел справа точке* $x \in A$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{osc}_+(f; x) = 0$.

3) *Функция* $f : A \to \mathbb{E}$ *имеет предел слева в точке* $x \in A$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{osc}_-(f; x) = 0$.

Доказательство. Докажем первое утверждение; второе и третье доказываются с помощью критерия Коши. Пусть $f : A \to \mathbb{E}$ — непрерывная функция. Очевидно, в изолированной точке x функция f непрерывна и $\operatorname{osc}(f; x) = 0$.

Если $x \in A$ — предельная точка, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in A\ (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Если $0 < r < \delta$, то из определения колебания функции в точке $\operatorname{osc}(f; A \cap (x - r, x + r)) \leq 2\varepsilon$. Так как ε — произвольное положительное число, то $\operatorname{osc}(f; x) = 0$.

С другой стороны, если колебание функции f в точке x равно нулю, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r_0 > 0\ \forall r \in (0, r_0)\ (\operatorname{osc}(f; A \cap (x - r, x + r)) < \varepsilon).$$

Поскольку $|f(x) - f(y)| \le \operatorname{osc}(f; A \cap (x-r, x+r)) < \varepsilon$ для всех $y \in A$ таких, что $|x - y| < r$, то f непрерывна в точке x.

9.8. I критерий интегрируемости в терминах колебаний. *Функция $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ тогда и только тогда, когда f ограничена и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что*

$$\sum_i \operatorname{osc}(f;\Delta_i)\mu(\Delta_i) < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$. Необходимость ограниченности доказана в п. 8.5. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ по лемме 8.6 существуют ступенчатые функции $\varphi \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такие, что $|f(x) - \varphi(x)| \le \psi(x)$ для всех $x \in [a,b]$ и $\int\limits_a^b \psi\, d\mu < \varepsilon/2$. Возьмем теперь измельченное разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a,b]$ так, чтобы обе ступенчатые функции φ и ψ были подчинены этому разбиению (свойство 3.2). Тогда для точек $x, y \in \Delta_i$ с учетом $\varphi(x) = \varphi(y)$ имеем

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x) - \varphi(x) + \varphi(y) - f(y)| \\ &\le |f(x) - \varphi(x)| + |f(y) - \varphi(y)| \le \psi(x) + \psi(y).\end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку для колебания функции f на промежутке Δ_i:

$$\operatorname{osc}(f;\Delta_i) \le 2c_i, \quad \text{где } c_i \text{ — значение } \psi \text{ на } \Delta_i.$$

Следовательно,

$$\sum_i \operatorname{osc}(f;\Delta_i)\mu(\Delta_i) \le 2\sum_i c_i\mu(\Delta_i) = 2\int\limits_a^b \psi\, d\mu < \varepsilon.$$

Достаточность. Фиксируем произвольное число ε, по которому найдем разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что выполняется (9.1). Определим ступенчатую функцию $\varphi \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{E})$ следующим образом: на промежутке Δ_i полагаем $\varphi = f(x_i)$, где x_i — произвольная точка промежутка Δ_i. Из определения колебания вытекает $|f(x) - f(x_i)| \le \operatorname{osc}(f;\Delta_i)$ для произвольной точки $x_i \in \Delta_i$. Отсюда получаем $|f(x) - \varphi(x)| \le \psi(x)$, где ступенчатая функция $\psi \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$ равна $\operatorname{osc}(f;\Delta_i)$ на промежутке Δ_i. В силу указанного выбора имеем

$\int\limits_a^b \psi\, d\mu < \varepsilon$. Так как выбор ε произволен, то $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ по лемме 8.6.

9.9. Задача. Доказать первый критерий интегрируемости для функции $f \in \mathcal{R}_\mu(P;\mathbb{E})$, где $P \subset [a,b]$ — некоторый промежуток (см. определение 8.15): *функция $f \in \mathcal{R}_\mu(P;\mathbb{E})$ тогда и только тогда, когда f ограничена и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{\Delta_i\}$ промежутка $P \subset [a,b]$ такое, что*

$$\sum_i \operatorname{osc}(f;\Delta_i)\mu(\Delta_i) < \varepsilon. \tag{9.2}$$

В дополнение к необходимому признаку интегрируемости 8.5, справедливому для любой меры, мы получаем новые необходимые признаки для специально выбранной меры.

9.10. Следствие. (Необходимый признак интегрируемости по мере из определения 4.5.) *Пусть мера μ из определения 4.5 задана по измеряющей функции $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Пусть $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$. Тогда следующие условия необходимы:*

1) *если функция α разрывна справа (слева) в точке $x \in [a,b)$ ($x \in (a,b]$), то $\operatorname{osc}_+(f;x) = 0$ ($\operatorname{osc}_-(f;x) = 0$);*

2) *если $\operatorname{osc}_+(f;x) > 0$ ($\operatorname{osc}_-(f;x) > 0$) в точке $x \in [a,b)$ ($x \in (a,b]$), то функция α непрерывна справа (слева) в точке x.*

Доказательство. Действительно, пусть для определенности $x < b$. Если $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$, то по свойству 8.17 аддитивности интеграла $f \in \mathcal{R}_\mu([x,b];\mathbb{E})$. В силу первого критерия интегрируемости по $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[x,b]$ такое, что

$$\sum_i \operatorname{osc}(f;\Delta_i)\mu(\Delta_i) < \varepsilon.$$

Пусть Δ_k — неодноточечный промежуток, левый конец которого — точка x. Тогда из предыдущего соотношения имеем

$$\operatorname{osc}_+(f;x)(\alpha(x+) - \alpha(x)) \le \operatorname{osc}(f;\Delta_k)\mu(\Delta_k) < \varepsilon.$$

Отсюда $\operatorname{osc}_+(f;x)(\alpha(x+) - \alpha(x)) = 0$. Следовательно, множители в левой части не могут одновременно быть ненулевыми. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Следствие 9.10 можно обобщить на случай произвольных мер. Введем для этого новое определение.

9.11. Определение. Рассмотрим конечно-аддитивную меру μ, определенную на промежутках отрезка $[a,b]$. Будем говорить, что правое колебание меры μ в точке $x \in [a,b)$ равно нулю, если

$$\operatorname{osc}_+(\mu;x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y\to x,\ y>x} \mu((x,y)) = 0.$$

По аналогии левое колебание меры μ в точке $x \in (a,b]$ равно нулю, если

$$\operatorname{osc}_-(\mu;x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y\to x,\ y<x} \mu((y,x)) = 0.$$

9.12. Задача. Доказать, что для меры μ определения 4.8 ее правое (левое) колебание в произвольной точке $x \in [a,b)$ ($x \in (a,b]$) равно нулю.

9.13. Задача. Доказать, что для конечно-аддитивной меры μ, определенной на промежутках отрезка $[a,b]$, множество точек $x \in [a,b]$, в которых $\operatorname{osc}_+(\mu;x) > 0$ (или $\operatorname{osc}_-(\mu;x) > 0$), не более чем счетно.

Указание: показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ совокупность точек $x \in [a,b]$, в которых $\operatorname{osc}_+(\mu;x) > n^{-1}$ (или $\operatorname{osc}_-(\mu;x) > n^{-1}$), конечно.

9.14. Следствие. (Необходимый признак интегрируемости по конечно-аддитивной мере.) *Пусть конечно-аддитивная мера μ определена на промежутках отрезка $[a,b] \to \mathbb{R}$. Пусть $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$. Тогда*

1) *если правое (левое) колебание $\operatorname{osc}_+(\mu;x)$ $(\operatorname{osc}_-(\mu;x))$ меры μ в точке $x \in [a,b)$ ($x \in (a,b]$) положительно, то $\operatorname{osc}_+(f;x) = 0$ $(\operatorname{osc}_-(f;x) = 0)$;*

2) *если $\operatorname{osc}_+(f;x) > 0$ $(\operatorname{osc}_-(f;x) > 0)$ в точке $x \in [a,b)$ ($x \in (a,b]$), то правое (левое) колебание $\operatorname{osc}_+(\mu;x)$ $(\operatorname{osc}_-(\mu;x))$ меры μ в точке x равно нулю.*

Доказательство. Действительно, пусть для определенности $a \le x < b$. Если $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$, то по свойству 8.17 аддитивности интеграла $f \in \mathcal{R}_\mu((x,b];\mathbb{E})$. В силу первого критерия интегрируемости по

$\varepsilon > 0$ найдется разбиение $\{\Delta_i\}$ промежутка $(x, b]$ такое, что

$$\sum_i \operatorname{osc}(f; \Delta_i)\mu(\Delta_i) < \varepsilon.$$

Пусть Δ_k — неодноточечный промежуток, левый конец которого — точка x. Тогда из предыдущего соотношения имеем

$$\operatorname{osc}_+(f; x) \operatorname{osc}_+(\mu; x) \leq \operatorname{osc}(f; \Delta_k)\mu(\Delta_k) < \varepsilon.$$

Отсюда $\operatorname{osc}_+(f; x) \operatorname{osc}_+(\mu; x) = 0$. Следовательно, множители в левой части не могут одновременно быть ненулевыми. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

9.15. II критерий интегрируемости в терминах колебаний. *Функция $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$ тогда и только тогда, когда f ограничена и для любых положительных чисел ε и δ существует разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что сумма μ-мер промежутков этого разбиения, на которых колебание функции f не меньше ε, меньше δ.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$. Необходимость ограниченности доказана в п. 8.5. Дальнейшие рассуждения могут быть продолжены двумя способами.

1) Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. В соответствии с I критерием интегрируемости 9.8, для $\varepsilon' = \varepsilon\delta$ существует разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\sum_i \operatorname{osc}(f; \Delta_i)\mu(\Delta_i) < \varepsilon'.$$

Тогда

$$\sum_{i,\, \operatorname{osc}(f;\Delta_i) \geq \varepsilon} \mu(\Delta_i) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i,\, \operatorname{osc}(f;\Delta_i) \geq \varepsilon} \operatorname{osc}(f; \Delta_i)\mu(\Delta_i)$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_i \operatorname{osc}(f; \Delta_i)\mu(\Delta_i) < \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \delta.$$

2) Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. В соответствии с леммой 8.6, для $\varepsilon' = \varepsilon\delta/2 > 0$ существуют ступенчатые функции $\varphi \in \operatorname{Step}([a, b]; \mathbb{E})$ и $\psi \in \operatorname{Step}([a, b]; \mathbb{R})$ такие, что $|f(x) - \varphi(x)| \leq \psi(x)$ для всех $x \in [a, b]$ и $\int\limits_a^b \psi \, d\mu < \varepsilon'$. Возьмем теперь измельченное разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a, b]$ так, чтобы обе ступенчатые функции φ и ψ были подчинены

этому разбиению (свойство 3.2). Тогда для точек $x, y \in \Delta_i$ имеем

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - \varphi(x) + \varphi(y) - f(y)| \\ \le |f(x) - \varphi(x)| + |f(y) - \varphi(y)| \le \psi(x) + \psi(y).$$

Отсюда получаем оценку для колебания функции f на промежутке Δ_i:

$$\operatorname{osc}(f; \Delta_i) \le 2c_i, \quad \text{где } c_i \text{ — значение } \psi \text{ на } \Delta_i.$$

Следовательно, если $\operatorname{osc}(f; \Delta_i) \ge \varepsilon$ на промежутке Δ_i, то на этом промежутке значение функции $\psi \ge \varepsilon/2$. Применяя неравенство Чебышёва, п. 6.14, получаем

$$\sum_{j,\,\operatorname{osc}(f;\Delta_j)\ge\varepsilon} \mu(\Delta_j) \le \sum_{k,\,\psi|_{\Delta_k}\ge\varepsilon/2} \mu(\Delta_k) \le \frac{2}{\varepsilon}\int\limits_a^b \psi(x)\, d\mu(x) < \delta.$$

Достаточность. Покажем, что для функции, удовлетворяющей условию теоремы, выполняется I критерий интегрируемости в терминах колебаний. Фиксируем для этого $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2\mu([a,b])}$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{4M}$, где M такая постоянная, что $|f(x)| \le M$. По условию теоремы существует разбиение $\{\Delta_j\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что суммы μ-мер тех промежутков, на которых колебание больше ε', меньше δ. Для этого разбиения имеем

$$\sum_j \operatorname{osc}(f; \Delta_j)\mu(\Delta_j) < \varepsilon' \sum_j \mu(\Delta_j) + 2M {\sum_i}' \mu(\Delta_i),$$

где символ ${\sum\limits_i}'$ обозначает, что в сумме остаются лишь те индексы i, для которых колебание $\operatorname{osc}(f; \Delta_i) \ge \varepsilon'$. Окончательно получаем

$$\sum_j \operatorname{osc}(f; \Delta_j)\mu(\Delta_j) < \frac{\varepsilon}{2\mu[a,b]} \cdot \mu[a,b] + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

9.16. Задача. Доказать второй критерий интегрируемости для функции $f \in \mathcal{R}_\mu(P; \mathbb{E})$, где $P \subset [a, b]$ — некоторый промежуток (см. определение 8.15): *функция $f \in \mathcal{R}_\mu(P; \mathbb{E})$ тогда и только тогда, когда f ограничена и для любых положительных чисел ε и δ существует разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что сумма μ-мер промежутков этого разбиения, на которых колебание функции f не меньше ε, меньше δ.*

9.17. Критерий Дарбу. *Ограниченная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по мере μ тогда и только тогда, когда*

$$\sup\Big\{\int\limits_a^b \varphi(x)\,d\mu(x) : \ \varphi \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R}),\ \varphi(x) \le f(x),\ x \in [a,b]\Big\}$$

$$= \inf\Big\{\int\limits_a^b \psi(x)\,d\mu(x) : \ \psi \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R}),\ f(x) \le \psi(x),\ x \in [a,b]\Big\}.$$

Величина в верхней строчке называется нижним интегралом Дарбу, а в нижней — верхним интегралом Дарбу.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 8.6 существуют ступенчатые функции $h \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$ и $s \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такие, что $|f(x) - h(x)| \le s(x)$, и $\int\limits_a^b s(x)\,d\mu(x) < \varepsilon/2$. Отсюда имеем неравенства $h(x) - s(x) \le f(x) \le h(x) + s(x)$. Полагая $\varphi(x) = h(x) - s(x)$ и $\psi(x) = h(x) + s(x)$, получаем соотношения $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ и $\psi(x) - \varphi(x) = 2s(x)$. Следовательно, $0 \le \int\limits_a^b \psi(x)\,d\mu(x) - \int\limits_a^b \varphi(x)\,d\mu(x) \le 2\int\limits_a^b s(x)\,d\mu(x) < \varepsilon$. Так как ε — произвольное число, необходимость доказана.

Достаточность. По фиксированному $\varepsilon > 0$ подберем ступенчатые функции φ и ψ класса $\operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$ так, чтобы $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ и

$$\int\limits_a^b \psi(x)\,d\mu(x) - \int\limits_a^b \varphi(x)\,d\mu(x) < \varepsilon.$$

Полагая $\psi(x) - \varphi(x) = s(x) \in \operatorname{Step}([a,b];\mathbb{R})$, имеем $|f(x) - \varphi(x)| \le s(x)$ и $\int\limits_a^b s(x)\,d\mu(x) < \varepsilon$. Отсюда по лемме 8.6 вытекает интегрируемость функции f.

10. Критерий интегрируемости Лебега

Повторим приведенное в п. 4.23 определение множества нулевой

μ-меры.

10.1. Определение *множества μ-меры нуль. Говорят, что множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет μ-меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие этого множества не более чем счетным набором промежутков $P_i = \langle a_i, b_i \rangle$, суммарная μ-мера которых меньше ε, т. е.,*

$$\sum_i \mu(P_i) < \varepsilon.$$

10.2. Свойства *множеств нулевой μ-меры приведены в пп.* 4.25 — 4.27, 5.3. *Здесь нам понадобится следующее свойство: объединение не более чем счетной совокупности множеств нулевой μ-меры есть множество μ-меры нуль.*

10.3. Термин «почти всюду». Говорят, что некоторое свойство, зависящее от точек вещественной прямой, *выполняется μ-почти всюду*, если множество тех точек, где это свойство не выполняется, имеет нулевую μ-меру.

Докажем вначале классический критерий Лебега для интегрируемых по Риману функций, а затем — его обобщение на случай произвольных конечно-аддитивных мер.

10.4. Теорема Лебега интегрируемости по Риману. *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{E}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда*

1) *f ограничена на $[a, b]$;*

и

2) *множество точек разрыва функции f на отрезке $[a, b]$ имеет меру Лебега нуль (f непрерывна почти всюду относительно меры Лебега).*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{E})$. Очевидно, что множество точек разрыва функции f содержится в объединении множеств $A_k = \{x \in [a, b] : \operatorname{osc}(f; x) \geq k^{-1}\}$, где $k \in \mathbb{N}$. В силу свойства 10.2 достаточно доказать, что $|A_k| = 0$.

Фиксируем произвольное число $\delta > 0$. По второму критерию интегрируемости в терминах колебаний существует разбиение $\{P_i\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что сумма мер промежутков разбиения $\{P_i\}$, на которых колебание функции f не меньше k^{-1}, меньше $\frac{\delta}{2}$:

$$\sum_{i,\, \operatorname{osc}(f; P_i) \geq k^{-1}} |P_i| < \frac{\delta}{2}. \tag{10.1}$$

Поэтому, если в точке $x \in [a,b]$ колебание $\operatorname{osc}(f;x) \geq k^{-1}$, то в силу замечания 2 (п. 9.6) точка x — либо внутренняя для некоторого промежутка $P_j \in \{P_i\}$ такого, что $\operatorname{osc}(f;P_j) \geq k^{-1}$, либо граничная для одного из промежутков P_k разбиения $\{P_i\}$ отрезка $[a,b]$. Очевидно, существует конечный набор $\{U_j\}$ интервалов таких, что объединение $\bigcup\limits_j U_j$ содержит граничные точки всех промежутков P_k разбиения $\{P_i\}$, и

$$\sum_j |U_j| < \frac{\delta}{2}. \tag{10.2}$$

Следовательно, справедливо включение

$$\{x \in [a,b] : \operatorname{osc}(f;x) \geq k^{-1}\} \subset \bigcup_{i,\, P_i \in T_k} P_i \cup \bigcup_j U_j.$$

Отсюда имеем, что множество $A_k = \{x \in [a,b] : \operatorname{osc}(f;x) \geq k^{-1}\}$ покрывается совокупностью промежутков, сумма мер Лебега которых, в силу (10.1) и (10.2), меньше δ. Так как $\delta > 0$ может быть выбрано произвольно малым, то A_k имеет нулевую меру Лебега: $|A_k| = 0$.

Достаточность. Пусть множество точек разрыва ограниченной функции $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ имеет меру Лебега нуль. Фиксируем произвольные положительные числа ε и δ. Пусть $A_\varepsilon = \{x \in [a,b] : \operatorname{osc}(f;x) \geq \varepsilon\}$. По условию теоремы мера Лебега множества A_ε равна нулю. Поэтому существует не более чем счетная совокупность интервалов V_j, покрывающая множество A_ε, сумма мер Лебега которых меньше δ: $\sum\limits_j |V_j| < \delta$. Для любой точки $x \in [a,b] \setminus \bigcup\limits_j V_j$ имеем $\operatorname{osc}(f;x) < \varepsilon$. Поэтому существует интервал $U(x)$ с центром в точке x такой, что $\operatorname{osc}(f;U(x)) < \varepsilon$.

Совокупность интервалов $\big\{V_j : j \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{U(x) : x \in [a,b] \setminus \bigcup\limits_j V_j\big\}$, образует открытое покрытие отрезка $[a,b]$. По лемме Бореля — Лебега из этой совокупности интервалов можно выбрать конечную совокупность, образующую покрытие отрезка $[a,b]$. По лемме 2.9 для данной конечной совокупности интервалов существует разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что замыкание каждого из промежутков разбиения содержится либо в V_j для некоторого j, либо в $U(x_l)$ для некоторого x_l. Кроме того, если $\overline{\Delta}_i \subset U(x_l)$, то $\operatorname{osc}(f;\overline{\Delta}_i) \leq \operatorname{osc}(f;U(x_l)) < \varepsilon$. Поэтому сумма мер Лебега промежутков этого разбиения, на которых колебание функции f не меньше ε, очевидно, не превосходит суммы

$\sum\limits_j |V_j| < \delta$. Таким образом, выполнены все условия II критерия интегрируемости в терминах колебаний и поэтому $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$.

10.5. Критерий Лебега интегрируемости по произвольной конечно-аддитивной меры. *Пусть μ — конечно-аддитивная мера, определенная на промежутках отрезка $[a,b]$. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ интегрируема по мере μ тогда и только тогда, когда*

1) *f ограничена на $[a,b]$;*

2) *для f выполнено необходимое условие интегрируемости 9.14: $\operatorname{osc}_-(f;x)\operatorname{osc}_-(\mu;x) = 0$ и $\operatorname{osc}_+(f;x)\operatorname{osc}_+(\mu;x) = 0$ для произвольной точки $x \in [a,b]$;*

и

3) *множество точек разрыва функции f на отрезке $[a,b]$ без учета точек ненулевой μ-меры имеет μ-меру нуль.*

Доказательство. Необходимость. Необходимость 1) и 2) доказана в пп. 8.5 и 9.14. Пусть $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$. Очевидно, что множество точек разрыва функции f без учета точек ненулевой μ-меры содержится в объединении множеств $A_k = \{x \in [a,b] : \operatorname{osc}(f;x) \geq k^{-1}$ и $\mu(x) = 0\}$, где $k \in \mathbb{N}$. В силу свойства 10.2 достаточно доказать, что $\mu(A_k) = 0$.

Фиксируем произвольное число $\delta > 0$. По второму критерию интегрируемости в терминах колебаний существует разбиение $\{P_i\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что сумма μ-мер совокупности T_k промежутков, на которых колебание функции f не меньше k^{-1}, меньше δ:

$$\sum_{i,\, P_i \in T_k} \mu(P_i) < \delta. \tag{10.3}$$

Поэтому, если в точке $x \in [a,b]$ колебание $\operatorname{osc}(f;x) \geq k^{-1}$, то в силу замечания 2 (п. 9.6) точка x — либо внутренняя для одного из промежутков совокупности T_k, либо граничная для одного из промежутков разбиения $\{P_i\}$ отрезка $[a,b]$ (таких точек лишь конечное число). Заметим, что если мера μ граничной точки равна нулю, то ее можно выделить в отдельный элемент разбиения и считать включенной в совокупность T_k; если же мера μ этой граничной точки положительна, то она не входит в множество A_k. Отсюда вытекает включение

$$\{x \in [a,b] : \operatorname{osc}(f;x) \geq k^{-1} \text{ и } \mu(x) = 0\} \subset \bigcup_{i,\, P_i \in T_k} P_i$$

и на основании 10.3 вывод: сумма мер промежутков разбиения $\{P_i\}$, на которых колебание функции f не меньше k^{-1}, меньше δ. Так как $\delta > 0$ может быть выбрано произвольно малым, то A_k имеет нулевую μ-меру: $\mu(A_k) = 0$.

Достаточность. Пусть множество точек разрыва ограниченной функции $f : [a, b] \to \mathbb{E}$ без учета точек ненулевой μ-меры имеет μ-меру нуль и для f выполнено необходимое условие интегрируемости 9.14. Фиксируем произвольные положительные числа ε и δ. Пусть $A_\varepsilon = \{x \in [a, b] : \operatorname{osc}(f; x) \geq \varepsilon,\ \mu(x) = 0\}$. По условию теоремы μ-мера множества A_ε равна нулю. Поэтому существует не более чем счетная совокупность промежутков $\{V_k = \langle c_k, d_k\rangle\}$, $\langle c_k, d_k\rangle \subset [a, b]$, покрывающая множество A_ε, сумма μ-мер которых меньше δ:

$$\sum_k \mu(V_k) < \delta. \tag{10.4}$$

Разделим совокупность всех промежутков $\{V_k = \langle c_k, d_k\rangle\}$ на две — T_{lc} и T_{ld}: в первую войдут промежутки, открытые слева, а также промежутки вида $[c_k, d_k\rangle$ такие, что $\operatorname{osc}_-(\mu; c_k) = 0$. Во вторую совокупность войдут все оставшиеся промежутки — это будут промежутки вида $[c_k, d_k\rangle$ такие, что $\operatorname{osc}_-(f; c_k) = 0$ (эквивалентно, $\operatorname{osc}_-(\mu; c_k) > 0$).

С промежутками совокупности T_{lc} поступим следующим образом: если промежуток $\langle c_i, d_i\rangle \in T_{lc}$ открыт слева, то переобозначим его символом $(c_i', d_i\rangle$, $c_i' = c_i$; если же промежуток $\langle c_i, d_i\rangle \in T_{lc}$ замкнут слева, то включим его в больший промежуток $(c_i', d_i\rangle \supset [c_i, d_i\rangle$ так, чтобы наряду с (10.4) выполнялось неравенство

$$\sum_i \mu((c_i', d_i\rangle) + \sum_k \mu([c_k, d_k\rangle) < \delta. \tag{10.5}$$

Это можно сделать, поскольку $\lim\limits_{c_i' \to c_i, c_i' < c_i} \mu((c_i', c_i)) = 0$ и $\mu((c_i', d_i\rangle) = \mu((c_i', c_i)) + \mu([c_i, d_i\rangle)$ Систему переобозначенных или расширенных влево промежутков вида $(c_i', d_i\rangle$ обозначим символом T_{lo}.

Полученную систему промежутков T_{lo} разобьем, в свою очередь, на два класса:

$$T_{lo} = T_{lorc} \cup T_{lord}.$$

В первый класс войдут все промежутки вида $(c_i', d_i\rangle \in T_{lo}$ открытые справа, а также замкнутые справа и такие, что $\operatorname{osc}_+(\mu; d_i) = 0$. Во второй класс войдут все оставшиеся в T_{lo} промежутки — это будут промежутки вида $(c_i', d_i] \in T_{lo}$ такие, что $\operatorname{osc}_+(f; d_i) = 0$ (эквивалентно, $\operatorname{osc}_+(\mu; d_i) > 0$).

С промежутками совокупности T_{lorc} поступим следующим образом: если промежуток $(c_j', d_j\rangle$ открыт справа, то переобозначим его символом (c_j', d_j'), $d_j' = d_j$; если же промежуток $(c_j', d_j\rangle \in T_{lorc}$ замкнут справа, то включим его в больший промежуток $(c_j', d_j') \supset (c_j', d_j]$ так, чтобы вместе с (10.5) выполнялось неравенство

$$\sum_j \mu((c_j', d_j')) + \sum_i \mu((c_i', d_i]) + \sum_k \mu([c_k, d_k\rangle) < \delta. \tag{10.6}$$

Систему переобозначенных или расширенных вправо промежутков вида (c_j', d_j') обозначим символом T_{loro}.

Систему промежутков T_{ld} разобьем, в свою очередь, на два класса:

$$T_{ld} = T_{ldrc} \cup T_{ldrd}.$$

В первый класс войдут все промежутки вида $[c_k, d_k\rangle \in T_{ld}$ такие, что либо они открыты справа, либо замкнутые справа и $\operatorname{osc}_+(\mu; d_k) = 0$. Во второй класс войдут все оставшиеся в T_{ld} промежутки — это будут промежутки вида $[c_k, d_k] \in T_{ld}$ такие, что $\operatorname{osc}_-(f; c_k) = 0$ и $\operatorname{osc}_+(f; d_k) = 0$ (эквивалентно, $\operatorname{osc}_-(\mu; c_k) > 0$ и $\operatorname{osc}_+(\mu; d_k) > 0$).

С промежутками совокупности T_{ldrc} поступим следующим образом: если промежуток $[c_l, d_l\rangle$ открыт справа, то переобозначим его символом $[c_l, d_l')$, $d_l' = d_l$; если же промежуток $[c_l, d_l\rangle \in T_{ldrc}$ замкнут справа, то включим его в больший промежуток $[c_l, d_l') \supset [c_l, d_l]$ так, чтобы вместе с (10.6) выполнялось также неравенство

$$\sum_j \mu((c_j', d_j')) + \sum_i \mu((c_i', d_i]) + \sum_l \mu([c_l, d_l')) + \sum_k \mu([c_k, d_k]) < \delta. \tag{10.7}$$

Систему переобозначенных или расширенных вправо промежутков вида $[c_l, d_l')$ обозначим символом T_{ldro}.

Следовательно, мы имеем 4 системы промежутков: T_{loro}, T_{lord}, T_{ldro} и T_{ldrd}, суммы μ-мер которых удовлетворяют (10.7).

Пусть $(c_i', d_i] \in T_{lord}$. Тогда к промежутку $(c_i', d_i]$ можно пристыковать интервал (d_i, d_i') такой, что $\operatorname{osc}(f; (d_i, d_i')) < \varepsilon$. Будем считать, что каждый промежуток $(c_i', d_i]$ преобразуется в промежуток $(c_i', d_i') = (c_i', d_i] \cup (d_i, d_i')$ и все новые промежутки (c_i', d_i') входят в T_{lord} вместо промежутков $(c_i', d_i]$.

Если $[c_l, d'_l) \in T_{ldro}$, то к промежутку $[c_l, d'_l)$ можно пристыковать интервал (c'_l, c_l) такой, что $\operatorname{osc}(f; (c'_l, c_l)) < \varepsilon$. Аналогично предыдущему, будем считать, что каждый промежуток $[c_l, d'_l)$ преобразуется в промежуток $(c'_l, d'_l) = (c'_l, c_l) \cup [c_l, d'_l)$ и все новые промежутки (c'_l, d'_l) входят в T_{ldro} вместо промежутков $[c_l, d'_l)$.

Если $[c_k, d_k] \in T_{ldrd}$, то к промежутку $[c_k, d_k]$ можно пристыковать интервалы (c'_k, c_k) и (d_k, d'_k) такие, что $\operatorname{osc}(f; (c'_k, c_k)) < \varepsilon$ и $\operatorname{osc}(f; (d_k, d'_k)) < \varepsilon$. В этом случае будем считать, что каждый промежуток $[c_k, d_k]$ преобразуется в промежуток $(c'_k, d'_k) = (c'_k, c_k) \cup [c_k, d_k] \cup (d_k, d'_k)$ и все новые промежутки (c'_k, d'_k) входят в T_{ldrd} вместо промежутков $[c_k, d_k]$.

Для любой точки

$$x \in [a, b] \setminus \bigcup_{m,\, P_m \in T_{loro} \cup T_{lord} \cup T_{ldro} \cup T_{ldrd}} P_m$$

нулевой μ-меры имеем $\operatorname{osc}(f; x) < \varepsilon$. Поэтому существует интервал $U(x)$ с центром в точке x такой, что $\operatorname{osc}(f; U(x)) < \varepsilon$.

Если же точка

$$x_s \in [a, b] \setminus \bigcup_{m,\, P_m \in T_{loro} \cup T_{lord} \cup T_{ldro} \cup T_{ldrd}} P_m$$

имеет ненулевую μ-меру (таких точек не более чем счетное множество), то типичной является следующая ситуация (остальные три рассматриваются аналогично): $\operatorname{osc}_-(\mu; x_s) = 0$, тогда может быть $\operatorname{osc}_-(f; x_s) \geq \varepsilon$, а $\operatorname{osc}_+(\mu; x_s) > 0$, тогда $\operatorname{osc}_+(f; x_s) = 0$. Поэтому существует интервал $V(x_s) = (\alpha_s, \beta_s)$ с центром в точке x_s такой, что

$$\mu((\alpha_s, x_s)) < \delta/2^{s+1}, \quad \text{а} \quad \operatorname{osc}(f; (x_s, \beta_s)) < \varepsilon. \tag{10.8}$$

Совокупность интервалов $\{P_m, U(x), V(x_s)\}$, $s \in \mathbb{N}$, где

$$P_m \in T_{loro} \cup T_{lord} \cup T_{ldro} \cup T_{ldrd}, \quad x \in [a, b] \setminus \bigcup_{m,\, P_m \in T_{loro} \cup T_{lord} \cup T_{ldro} \cup T_{ldrd}} P_m$$

и $x \neq x_s$ ни для какого $s \in \mathbb{N}$, образует открытое покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме Бореля — Лебега из этой совокупности интервалов можно выбрать конечную совокупность, образующую покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме 2.9 для данной конечной совокупности интервалов существует разбиение $\{\Delta_n\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что замыкание каждого из промежутков разбиения содержится либо в некотором

$P_m \in T_{loro} \cup T_{lord} \cup T_{ldro} \cup T_{ldrd}$, либо в $U(x_p)$ для некоторого x_p, либо в $V(x_s)$ для некоторого x_s.

Если $\Delta_n \subset P_j$, где $P_j \in T_{loro}$, то, возможно, $\operatorname{osc}(f;\Delta_n) \geq \varepsilon$. Кроме того,

$$\mu(\Delta_n) \leq \mu(P_j), \quad P_j \in T_{loro}. \tag{10.9}$$

Если же $\Delta_n \subset P_i$, где $P_i = (c_i', d_i') \in T_{lord}$, то разобьем промежуток Δ_n на два: $\Delta_n \cap (d_i, d_i')$ и $\Delta_n \cap (c_i', d_i]$. На первом из них колебание функции f меньше ε, а на втором, возможно, $\operatorname{osc}(f;\Delta_n \cap (c_i', d_i]) \geq \varepsilon$. При этом

$$\mu(\Delta_n \cap (c_i', d_i]) \leq \mu(P_i), \quad P_i \in T_{lord}. \tag{10.10}$$

Аналогично, если $\Delta_n \subset P_l$, где $P_l = (c_l', d_l') \in T_{ldro}$, то разобьем промежуток Δ_n на два: $\Delta_n \cap (c_l', c_l)$ и $\Delta_n \cap [c_l, d_l')$. На первом из них колебание функции f меньше ε, а на втором, возможно, $\operatorname{osc}(f;\Delta_n \cap [c_l, d_l')) \geq \varepsilon$. Более того,

$$\mu(\Delta_n \cap [c_l, d_l')) \leq \mu(P_l), \quad P_l \in T_{ldro}. \tag{10.11}$$

И, наконец, если $\Delta_n \subset P_k$, где $P_k = (c_k', d_k') \in T_{ldrd}$, то разобьем промежуток Δ_n на три: $\Delta_n \cap (c_k', c_k)$, $\Delta_n \cap (d_k, d_k')$ и $\Delta_n \cap [c_k, d_k]$. На первых двух колебание функции f меньше ε, а на третьем, возможно, $\operatorname{osc}(f;\Delta_n \cap [c_k, d_k]) \geq \varepsilon$. Для μ-меры промежутка Δ_n имеем

$$\mu(\Delta_n \cap [c_k, d_k]) \leq \mu(P_k), \quad P_k \in T_{ldrd}. \tag{10.12}$$

Если же $\Delta_n \subset V_{x_s}$, то разобьем промежуток Δ_n на пересечения $\Delta_n \cap (\alpha_s, x_s)$ и $\Delta_n \cap (x_s, \beta_s)$. Сумма μ-мер тех пересечений, на которых колебание функции f может быть не меньше ε, меньше $\delta/2^s$ (здесь s — фиксированное число).

Следовательно, из (10.7), (10.8), (10.9), (10.10), (10.11) и (10.12) вытекает, что сумма μ-мер промежутков полученного разбиения, на которых колебание функции f не меньше ε, меньше $\delta + \sum\limits_s \frac{\delta}{2^s} = 2\delta$. Таким образом, выполнены все условия II критерия интегрируемости по мере μ и поэтому $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$.

10.6. Задача. Пусть конечно-аддитивная мера μ определена на промежутках отрезка $[a,b]$. Пусть $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$ и $m \leq f(x) \leq M$ для всех точек отрезка $[a,b]$. Если $h : [m,M] \to \mathbb{E}$ — непрерывная функция, то суперпозиция $h \circ f$ принадлежит классу $\mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$.

10.7. Задача. Вывести из п. 10.5 критерии интегрируемости Лебега для

1) интегрируемой по мере μ функции: *Функция* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ *интегрируема по мере* μ *в случае непрерывной измеряющей функции* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* f *ограничена на* $[a,b]$ *и множество точек разрыва функции* f *на отрезке* $[a,b]$ *имеет* α*-меру нуль*;

2) интегрируемой по мере μ функции в случае регулярной меры: *функция* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ *интегрируема по регулярной мере* μ *тогда и только тогда, когда* f *ограничена на* $[a,b]$ *и множество точек разрыва функции* f *на отрезке* $[a,b]$ *без учета точек ненулевой* μ*-меры имеет* μ*-меру нуль.*

11. Классы интегрируемых функций

Пусть $P = \{P_i\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Величина $\max_i |P_i|$ обозначается в дальнейшем символом $\delta(P)$ либо $\delta(\{P_i\})$. Она характеризует, насколько разбиение $\{P_i\}$ является мелким относительно евклидова расстояния.

11.1. Разбиение для непрерывной функции. Если $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ — непрерывная функция, то по теореме Кантора f равномерно непрерывна: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех точек $x, y \in [a,b]$ таких, что $|x - y| < \tau$. Отсюда немедленно вытекает следующий вывод: *для любой непрерывной функции* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ *по заданному* ε *найдется разбиение* $\{P_i\}$ *отрезка* $[a,b]$ *такое, что* $\operatorname{osc}(f; P_i) < \varepsilon$ *для всех* i. Действительно, сформулированный вывод справедлив для любого разбиения, у которого $\delta(\{P_i\}) < \tau$. *Более того, если* ω *— модуль непрерывности функции* f*, то* $\operatorname{osc}(f; P_i) < \omega(\tau)$ *для всех* i.

11.2. Теорема. *Непрерывная функция* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ *интегрируема по произвольной конечно-аддитивной мере, определенной на промежутках отрезка* $[a,b]$. *Более того, справедлива оценка*

$$\left| \sum_i f(\xi_i)\mu(P_i) - \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x) \right| \le \omega(\tau)\mu([a,b])$$

для любого разбиения $\{P_i\}$ такого, что $\delta(\{P_i\}) < \tau$, и при любом выборе точек $\xi_i \in P_i$. (Здесь ω — модуль непрерывности функции f.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируемость функции f по конечно-аддитивной мере μ вытекает из теоремы Лебега п. 10.5.

Ниже мы приведем независимое доказательство, в котором будет установлена также оценка сходимости.

Пусть ω — модуль непрерывности функции f. Зададим $\tau > 0$. Тогда для произвольного разбиения $\{P_i\}$ с условием $\delta(\{P_i\}) < \tau$ справедлив сформулированный в п. 11.1 вывод: $\operatorname{osc}(f; P_i) \le \omega(\tau)$ для всех i. Фиксируем разбиение $\{P_i\}$ с таким свойством. Выберем произвольные точки $\xi_i \in P_i$ и рассмотрим ступенчатые функции

$$\varphi(x) = \sum_i f(\xi_i)\chi_{P_i}(x) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sum_i \operatorname{osc}(f; P_i)\chi_{P_i}(x).$$

Очевидно имеем $|f(x) - \varphi(x)| \le \operatorname{osc}(f; P_i) = \psi(x)$ для любой точки $x \in P_i$. Отсюда вытекают оценки

$$\begin{aligned}\|f - \varphi\| \le \int_a^b \psi(x)\, d\mu(x) &= \sum_i \operatorname{osc}(f; P_i)\mu(P_i) \\ &\le \omega(\tau) \sum_i \mu(P_i) = \omega(\tau)\mu([a, b]).\end{aligned}$$

Следовательно, $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$ по определению п. 8.1, так как $\omega(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\left|\sum_i f(\xi_i)\mu(P_i) - \int_a^b f(x)\, d\mu(x)\right| &= \left|\int_a^b (\varphi(x) - f(x))\, d\mu(x)\right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, d\mu(x) = \|f - \varphi\| \le \omega(\tau)\mu([a, b]).\end{aligned}$$

11.3. СВОЙСТВО. *Ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва, интегрируема по Риману.*

УКАЗАНИЕ. Это свойство можно доказать, используя либо II критерий в терминах колебаний, см. п. 9.15, либо критерий интегрируемости Лебега (см. теорему 10.4).

11.4. Задача. В каких случаях ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва, интегрируема по мере μ? (Рассмотреть меры с различными свойствами.)

11.5. Теорема. *Если функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *монотонна, а измеряющая функция* α *непрерывна, то* $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{R})$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Для любого положительного n выберем разбиение Δ_i так, чтобы

$$\mu(\Delta_i) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это можно сделать, так как функция α непрерывна (см. п. 4.10). Предположим для определенности, что функция f не убывает. Тогда очевидно колебание $\operatorname{osc}(f; \Delta_i)$ функции f на промежутке $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ не превосходит $f(x_i) - f(x_{i-1})$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\sum_i \operatorname{osc}(f; \Delta_i)\mu(\Delta_i) \leq \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} &\sum_i (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon,\end{aligned}$$

если n достаточно велико:

$$n > \frac{(f(b) - f(a))(\alpha(b) - \alpha(a))}{\varepsilon}.$$

11.6. Задача. Обобщить теорему 11.5 на случай произвольных измеряющих функций.
Указание: Использовать критерий интегрируемости Лебега 10.5.

12. Описание первообразных. Формула Ньютона — Лейбница. Формула интегрирования по частям

Напомним, что *производной в точке* $x \in (a, b)$ функции $g : (a, b) \to \mathbb{E}$ называется такой элемент $L \in \mathbb{E}$, что $g(x + h) - g(x) = hL + o(h)$, где $x + h \in (a, b)$ и $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|o(h)|}{h} = 0$. Производная обозначается либо символом $g'(x)$, либо символом $\frac{dg}{dx}(x)$.

Пусть $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$. Для любого $x \in [a,b]$ определим функцию

$$[a,b] \ni x \mapsto F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{E}$$

и исследуем ее свойства.

12.1. Свойство 1. *Если функция f непрерывна в точке $x \in (a,b)$, то функция F дифференцируема в точке x и $F'(x) = f(x)$.*

Доказательство. Оценим разностное отношение из определения производной (полагаем $h > 0$):

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} \{[f(t) - f(x)] + f(x)\}\,dt = f(x) + \alpha(h),$$

где $\alpha(h) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt$. Заметим, что $|\alpha(h)| \le \operatorname{osc}(f;[x,x+h])$. В силу непрерывности функции f в точке x, имеем: $\operatorname{osc}(f;[x,x+h]) \to 0$ при $h \to 0$. (Рассмотреть случай $h < 0$.) По этой причине

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

12.2. Свойство 2. *Если $|f(x)| \le M$ для всех $x,y \in [a,b]$, то $|F(x) - F(y)| \le M|x-y|$.*

Доказательство. Для всех $x, y \in [a,b]$, $x < y$, имеем

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int\limits_x^y f(t)\,dt\right| \le \int\limits_x^y |f(t)|\,dt \le M|x-y|.$$

12.3. Определение. Говорят, что функция $F : [a,b] \to \mathbb{E}$ принадлежит *классу Липшица на отрезке* $[a,b]$ (обозначение $F \in \operatorname{Lip}([a,b];\mathbb{E})$), если для некоторой постоянной M выполняется неравенство

$$|F(x) - F(y)| \le M|x-y|$$

для всех точек $x, y \in [a,b]$ (наименьшая постоянная M, удовлетворяющая этому неравенству, называется *постоянной Липшица*).

Таким образом, получен следующий результат.

12.4. Теорема. *Если* $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$, *то функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *обладает следующими свойствами:*

(1) $F \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{E})$*;*

(2) *функция* $F(x)$ *дифференцируема почти всюду на* $[a,b]$ *относительно меры Лебега и* $F'(x) = f(x)$ *почти всюду на* $[a,b]$.

Доказательство. (1) Принадлежность функции F классу Липшица доказана в свойстве 12.2.

(2) По критерию Лебега функция $f(x)$ непрерывна почти во всех точках отрезка $[a,b]$ относительно меры Лебега. По доказанному в свойстве 12.1, в точках непрерывности функции $f(x)$ имеем $F'(x) = f(x)$.

12.5. Лемма о постоянных функциях. *Пусть функция* $F : [a,b] \to \mathbb{E}$ *обладает следующими свойствами:*

(1) $F \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{E})$ *с постоянной Липшица* M*;*

(2) *функция* $F(x)$ *дифференцируема почти всюду на* $[a,b]$ *и производная* $F'(x)$ *равна* 0 *почти всюду относительно меры Лебега.*
Тогда F *— тождественно постоянная функция.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in [a,b]$. Множество точек E, где производная $F'(x)$ или не определена, или не равна нулю, имеет меру Лебега нуль. Тогда существует совокупность интервалов V_j, $j \in \mathbb{N}$, покрывающая E, сумма длин которых $\sum\limits_j |V_j| < \varepsilon/2M$. Для любой точки $x \in [a,b] \setminus E$ производная $F'(x) = 0$ и поэтому существует окрестность $U(x)$ такая, что

$$|F(y) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}|y - x|$$

для любой точки $y \in \overline{U}(x)$. Набор интервалов $\{V_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{U(x) : x \in [a,b] \setminus E\}$ — открытое покрытие отрезка $[a,b]$. Выберем из него конечное подпокрытие $V_1, \ldots, V_s, U(x_1), \ldots, U(x_r)$. Заметим, что центры этих интервалов можно выбрать такими, чтобы они принадлежали $[a,b]$. По лемме 2.9 существует разбиение $\{P_i\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что замыкание $\overline{P}_i$ любого промежутка P_i содержится в некотором открытом промежутке V_l или $U(x_n)$, причем центр этого открытого промежутка принадлежит $\overline{P}_i$.

Упорядочим концевые точки разбиения $\{P_i\}$ отрезка $[a,b]$ (одноточечные промежутки, если таковые имеются, можно исключить из рассмотрения): $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b$. Пусть точка $x \in [y_{k-1}, y_k]$. Тогда по неравенству треугольника имеем

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(a)| &\le \sum_{q=1}^{k-1} |F(y_q) - F(y_{q-1})| + |F(x) - F(y_{k-1})| \\
&\le \sum_{i,\,\overline{P}_i \subset U(x_n)} \operatorname{osc}(F; \overline{P}_i) + \sum_{i,\,\overline{P}_i \subset V_l} \operatorname{osc}(F; \overline{P}_i) \\
&\qquad\qquad < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Здесь для оценки $\operatorname{osc}(F; \overline{P}_i)$, $\overline{P}_i \subset U(x_n)$, мы воспользовались соотношениями

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(z)| &\le |F(y) - F(x_n)| + |F(x_n) - F(z)| \\
&\le \frac{\varepsilon}{4(b-a)}|y - x_n| + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}|z - x_n| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |P_i|
\end{aligned}$$

для любых точек $y, z \in \overline{P}_i$, так как $x_n \in \overline{P}_i$, а для оценки $\operatorname{osc}(F; \overline{P}_i)$, $\overline{P}_i \subset V_l$, — соотношениями

$$|F(y) - F(z)| \le M|y - z| \le M|P_i|, \; y, z \in \overline{P}_i.$$

Лемма доказана.

12.6. Определение. *Первообразной Лебега функции* $f \in \mathcal{B}([a,b]; \mathbb{E})$ называется функция $G : [a,b] \to \mathbb{E}$, удовлетворяющая условию Липшица, дифференцируемая почти всюду на $[a,b]$ и производная которой совпадает с функцией f почти всюду на $[a,b]$ относительно меры Лебега.

Из теоремы 12.4 получаем, что любая интегрируемая по Риману функция имеет первообразную Лебега. Из леммы 12.5 о постоянных функциях вытекает, что две первообразные Лебега функции $f \in \mathcal{B}([a,b]; \mathbb{E})$ отличаются на постоянную.

В частности, две первообразные интегрируемой по Риману функции отличаются на постоянную.

12.7. Формула Ньютона — Лейбница. *Если* $G : [a,b] \to \mathbb{E}$ *есть первообразная Лебега функции* $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$, *то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

Доказательство. По теореме 12.4 функция

$$[a,b] \ni x \mapsto F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной Лебега для f. Кроме того, $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)\,dt$. Так как разность $F(x) - G(x)$ двух первообразных удовлетворяет условиям леммы 12.5, то $F(x) = G(x) + \mathrm{const}$ для всех точек $x \in [a,b]$. Следовательно, $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$, поэтому формула Ньютона — Лейбница доказана.

Описание интегрируемых по Риману функций, интегральная норма которых равна нулю

12.8. Теорема. *Функция* $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$ *имеет интегральную норму нуль:* $\|f\| = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0$ *тогда и только тогда, когда* f *ограничена,* $f(x) = 0$ *почти всюду и* f *непрерывна почти всюду на* $[a,b]$ *относительно меры Лебега.*

Доказательство. Необходимость вытекает из пп. 8.27 и 10.4. Достаточность — из формулы Ньютона — Лейбница.

Формула интегрирования по частям

Из формулы Ньютона — Лейбница вытекает

12.9. Формула интегрирования по частям. *Если* $F \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{E})$ *(*$G \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathcal{K})$*) является первообразной Лебега функции* $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$ *(*$g \in \mathcal{R}([a,b];\mathcal{K})$*), то*

$$\int\limits_a^b g(x)F(x)\,dx = [G(b)F(b) - G(a)F(a)] - \int\limits_a^b G(x)f(x)\,dx.$$

Доказательство. Заметим, что функция $G(x)F(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a,b]$: $GF \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{E})$. Кроме того, $G(x)F(x)$ дифференцируема почти всюду и $(G(x)F(x))' = g(x)F(x) + G(x)f(x)$ почти всюду на $[a,b]$ относительно меры Лебега. Функция $g(x)F(x) + G(x)f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и непрерывна почти всюду относительно меры Лебега, поэтому $g(x)F(x)+G(x)f(x) \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$. Определим на отрезке $[a,b]$ функцию

$$[a,b] \ni x \mapsto H(x) = \int\limits_a^x (g(t)F(t) + G(t)f(t))\,dt.$$

Функция $H \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{E})$ по теореме 12.4 и дифференцируема почти всюду на $[a,b]$, причем $H'(x) = g(x)F(x) + G(x)f(x)$ почти всюду относительно меры Лебега. Следовательно, по лемме 12.5, $H(x) = G(x)F(x)+\mathrm{const}$ для всех $x \in [a,b]$, и поэтому $[G(b)F(b)-G(a)F(a)] = H(b)$, что и требовалось доказать.

13. Расширение понятия интегрируемой по Риману функции

В предыдущем разделе доказано, что первообразная $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируемой по Риману функции $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|F(x) - F(y)| \le M|x-y| \quad \text{для всех } x, y \in [a,b],$$

где $M = \sup\{|f(z)| : z \in [a,b]\}$, дифференцируема для почти всех по Лебегу точек $x \in [a,b]$ и в точках дифференцируемости $F'(x) = f(x)$.

Широкий пример липшицевых функций приведен в следующих задачах.

13.1. Задача. Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причем ее производная ограничена: $|f'(x)| \le M$, то функция f удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица M: $|f(x) - f(y)| \le M|x-y|$.

Таким образом, непрерывно дифференцируемые функции удовлетворяют условию Липшица.

13.2. Задача. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество. Тогда функция
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{dist}(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y|$$
удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица 1:
$$|\operatorname{dist}(x_1, E) - \operatorname{dist}(x_2, E))| \le |x_1 - y_2|.$$

Интересно отметить, что произвольная функция, удовлетворяющая условию Липшица, дифференцируема почти всюду: известна[3]

13.3. Теорема. *Всякая функция $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию Липшица на $[a, b]$, дифференцируема почти всюду на $[a, b]$ относительно меры Лебега.*

Таким образом, производная липшицевой функции $G'(x) = g(x)$ является функцией, определенной всюду на отрезке $[a, b]$ кроме, быть может, множества нулевой меры Лебега.

Возникает вопрос, *в каких случаях липшицева функция $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ может быть восстановлена по своей производной?*

Следующий пример показывает, что это не всегда возможно. Излагаемый ниже пример В. Вольтерра (1860–1940) по материалам книги *Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир,* 1967. С. 139–141, представлен А. Волошиным на миниконференции студентов 1-го курса 16 апреля 2004 года.

13.4. Пример. Существует функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию Липшица на $[0, 1]$, и производная которой разрывна на множестве положительной лебеговой меры. Таким образом, производная $f'(x)$ не удовлетворяет критерию Лебега 10.4 интегрируемости по Риману и поэтому функция $f(x)$ не может быть восстановлена по своей производной с помощью интеграла Римана.

Построение такой функции базируется на свойствах канторова множества $D \subset [0, 1]$ положительной меры (см. теорему 5.14). Для положительных x определим функцию g формулой $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Для любого положительного d обозначим символом x_d число $\sup\{x : g'(x) = 0,\ x \le d\}$. На промежутке $(0, d]$, где d — положительное число,

[3] См., например, *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин «Элементы теории функций и функционального анализа» М.: «Наука», 1968. С. 330.*

определим функцию

$$g_d(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in (0, x_d], \\ g(x_d), & \text{если } x \in [x_d, d]. \end{cases}$$

Определим функцию $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ следующим образом: если $x \in D$, то положим $f(x) = 0$; если же x принадлежит какому-либо интервалу (γ, δ) длины $2d = \delta - \gamma$, удаленному из $[0,1]$ при построении D, то положим

$$f(x) = \begin{cases} g_d(x - \gamma), & \text{если } x \in (\gamma, \gamma + d], \\ g_d(\delta - x), & \text{если } x \in [\delta - d, \delta). \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $f(\delta) = 0$ и $0 \le f(x) \le \frac{d^2}{4}$ и функция f симметрична относительно середины отрезка (γ, δ).

Если $x \in D$, а $y \in [0,1]$ — какая-либо другая точка, то либо $f(y) = 0$, либо y принадлежит некоторому удаленному интервалу (γ, δ). В первом случае $f(y) - f(x) = 0 = o(y - x)$. Во втором же случае, обозначив через b ближайший к точке y конец интервала (γ, δ), имеем

$$\begin{aligned} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \left|\frac{f(y)}{y - x}\right| \le \left|\frac{f(y)}{y - b}\right| = \left|\frac{g_d(|y - b|)}{y - b}\right| \\ \le \left|\frac{|y - b|^2}{y - b}\right| = |y - b| \le |y - x|. \end{aligned}$$

Следовательно, в обоих случаях $f(y) - f(x) = o(y - x)$, откуда $f'(x) = 0$ для любого $x \in D$.

С другой стороны, если $x \in [0,1] \setminus D$, то

$$|f'(x| \le \left|2z \sin\frac{1}{z} - \cos\frac{1}{z}\right| \le 3,$$

где z — некоторое число между 0 и 1. Таким образом, $f \in \mathcal{D}([0,1])$ и производная $f'(x)$ ограничена на $[0,1]$.

Учитывая, что $\overline{\lim\limits_{y \to 0+}}\, g'(y) = 1$, заключаем, что для всякой точки $x \in D$ справедливо равенство

$$\overline{\lim_{y \to x}}\, f'(y) = 1,$$

поскольку множество D нигде не плотно.

Приведенный пример помогает выявить трудности возникающие при ответе на сформулированный перед этим примером вопрос. Во-первых, производная $G'(x) = g(x)$ может быть определена не во всех точках отрезка $[a, b]$. Следовательно, необходимо иметь продолжение $\tilde{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ производной g, интегрируемое по Риману на отрезке $[a, b]$. Если такое продолжение существует, то оно необходимо должно быть ограниченным и непрерывным почти всюду на $[a, b]$ относительно меры Лебега. Во-вторых, для корректности восстановления функции $G(x) = \int\limits_a^x \tilde{g}(t)\,dt$ интеграл в правой части не должен зависеть от способа продолжения.

Из сказанного выше вытекает, что для положительного решения сформулированного вопроса необходимо, чтобы производная липшицевой функции, существующая по теореме 13.3 почти всюду, была непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве, где она существует. Оказывается, что это условие является также и достаточным для существования продолжения с нужными свойствами.

Из следующей теоремы вытекает, что производная G' липшицевой функции, существующая лишь почти всюду на $[a, b]$ и непрерывная почти всюду на области определения относительно меры Лебега, продолжается до функции $\tilde{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$, интегрируемой по Риману на $[a, b]$.

13.5. Теорема. *Пусть $D \subset [a, b]$ и $|[a, b] \setminus D| = 0$, а ограниченная функция $\theta : D \to \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду на D относительно меры Лебега. Тогда существует продолжение $\tilde{\theta} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tilde{\theta}|_D = \theta$, ограниченное на $[a, b]$ и непрерывное почти всюду на отрезке $[a, b]$ относительно меры Лебега. Таким образом, $\tilde{\theta} \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{R})$ и значение интеграла $\int\limits_a^b \tilde{\theta}(x)\,dx$ не зависит от способа продолжения.*

Доказательство. Пусть $D \subset [a, b]$ — область определения функции θ. По условию мера Лебега дополнения $[a, b] \setminus D$ равна нулю. По этой причине каждая точка $x \in [a, b] \setminus D$ является точкой прикосновения для D (в противном случае дополнение $[a, b] \setminus D$ содержит некоторую непустую окрестность точки x и поэтому мера Лебега множества $[a, b] \setminus D$ не может быть равной нулю). Определим функцию $\tilde{\theta} : [a, b] \to \mathbb{R}$, полагая $\tilde{\theta}(x) = \theta(x)$ в точках $x \in D$, а если $x \in [a, b] \setminus D$, то пусть

$$\tilde{\theta}(x) = \overline{\lim_{y \to x, y \in D}} \theta(y) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup\{\theta(y) : y \in D \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}.$$

Ограниченность функции $\tilde{\theta}$ очевидна. Пусть x — точка непрерывности функции $\theta : D \to \mathbb{R}$. Докажем, что функция $\tilde{\theta} : [a, b] \to \mathbb{R}$ также непрерывна в точке x. Для этого достаточно показать, что колебание функции $\tilde{\theta}$ на любом интервале $U \in \mathcal{N}(x)$ не превосходит колебания функции θ на пересечении $U \cap D$. Фиксируем $\delta > 0$ и обозначим символом $U_\delta(x)$ интервал $(x - \delta, x + \delta)$. Мы покажем, что справедливы следующие соотношения:

$$\sup_{y \in U_\delta(x)} \tilde{\theta}(y) \le \sup_{y \in U_\delta(x) \cap D} \theta(y), \tag{13.1}$$

$$\inf_{y \in U_\delta(x)} \tilde{\theta}(y) \ge \inf_{y \in U_\delta(x) \cap D} \theta(y), \tag{13.2}$$

откуда и вытекает искомая оценка на колебание. Если $z \in U_\delta \setminus D$, то при достаточно малом δ' имеем $U_{\delta'}(z) \subset U_\delta(x)$ и поэтому

$$\tilde{\theta}(z) \le \sup_{t \in U_{\delta'}(z) \cap D} \theta(t) \le \sup_{y \in U_\delta(x) \cap D} \theta(y).$$

Отсюда получаем (13.1). Справедливость соотношения (13.2) доказывается аналогично.

Если нашлось другое продолжение функции θ, удовлетворяющее тому же условию, то разность двух функций будет равна нулю почти всюду и будет непрерывной почти всюду на отрезке $[a, b]$ относительно меры Лебега. По теореме 12.8 интеграл разности этих функций равен нулю, следовательно, интегралы различных продолжений совпадают.

13.6. Следствие. *Липшицева функция $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, производная $G'(x) = g(x)$ которой непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве, где она существует, однозначно с точностью до постоянной восстанавливается по своей производной.*

Доказательство вытекает из теорем 13.3 и 13.5. Кроме того, $F(x) = \int_a^x \tilde{g}(t)\,dt$ не зависит от способа продолжения функции $g(x)$. Остается заметить, что $G(x) = F(x) + C$ для всех точек $x \in [a, b]$, где C — постоянная.

Результаты этого раздела мотивируют следующее расширение понятия интегрируемой по Риману функции.

13.7. Определение. Пусть $D \subset [a,b]$ — множество полной меры на $[a,b]$, т. е., $|[a,b] \setminus D| = 0$. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, если она ограничена и непрерывна почти всюду на D относительно меры Лебега.

Интегралом Римана функции f на отрезке $[a,b]$ называется величина

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)\,dx,$$

где $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ — произвольное продолжение функции f на отрезок $[a,b]$ такое, что $\tilde{f}$ ограничена и непрерывна почти всюду на $[a,b]$ относительно меры Лебега.

Корректность определения 13.7 вытекает из теоремы 13.5.

13.8. Определение. Пусть $D \subset [a,b]$ — множество полной меры на $[a,b]$, т. е., $|[a,b] \setminus D| = 0$. Пусть еще функция $f : D \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ в смысле определения 13.7. *Первообразной функции* $f : D \to \mathbb{R}$ называется функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию Липшица, дифференцируемая почти всюду на $[a,b]$ и производная которой совпадает с функцией f почти всюду на D относительно меры Лебега.

По следствию 13.6 первообразная определена корректно.

Отметим следующий свойства первообразных.

13.9. Теорема. *Пусть $D_1 \subset [a,b]$ и $D_2 \subset [a,b]$ — множества полной меры на $[a,b]$, т. е., $|[a,b] \setminus D_i| = 0$, $i = 1, 2$. Пусть еще функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ — первообразные функций $f : D_1 \to \mathbb{R}$ и $g : D_1 \to \mathbb{R}$ соответственно. Тогда*

1) *для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha F + \beta G : [a,b] \to \mathbb{R}$ является первообразной функции $\alpha f + \beta g : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$;*

2) *$F^+(x) = \max(0, F(x)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ — первообразная функции*

$$D_1 \ni x \mapsto f_{F^+}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } F(x) > 0, \\ 0, & \text{если } F(x) \le 0; \end{cases}$$

3) *$F^-(x) = -\min(0, F(x)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ — первообразная функции*

$$D_1 \ni x \mapsto f_{F^-}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } F(x) \ge 0, \\ -f(x), & \text{если } F(x) < 0; \end{cases}$$

4) $|F|(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *первообразная функции*

$$D_1 \ni x \mapsto f_{|F|}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } F(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } F(x) < 0; \end{cases}$$

5) $\max(F,G)(x) = \max(F(x), G(x)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *первообразная функции*

$$D_1 \cap D_2 \ni x \mapsto f_{\max(F,G)}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } F(x) > G(x), \\ g(x), & \text{если } F(x) \leq G(x); \end{cases}$$

6) $\min(F,G)(x) = \min(F(x), G(x)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *первообразная функции*

$$D_1 \cap D_2 \ni x \mapsto f_{\min(F,G)}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } F(x) > G(x), \\ f(x), & \text{если } F(x) \leq G(x). \end{cases}$$

Доказательство. 1) Первое утверждение вытекает из определения 13.8. Действительно, множество $D = D_1 \cap D_2$ имеет полную меру. Функция $\alpha f + \beta g : D \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ в смысле определения 13.7, т. е., она ограничена и непрерывна почти всюду на D относительно меры Лебега. Функция $\alpha F + \beta G : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица, дифференцируема почти всюду на $[a,b]$ и ее производная совпадает с функцией $\alpha f + \beta g$ почти всюду на D относительно меры Лебега.

2) Докажем второе утверждение. Удаляя из D_1 множество нулевой меры Лебега, можно считать, что функция f непрерывна во всех точках множества D_1. Тогда функция f_{F^+} также непрерывна во всех точках множества D_1.

Далее, совокупность точек $U = \{x \in [a,b] : F(x) < 0\}$ — открытое множество на отрезке $[a,b]$. Функция $F^+(x) = \max(0, F(x))$ равна тождественно нулю на открытом множестве U, поэтому $(F^+)'(x) = 0$ для всех $x \in U$. Аналогично, множество $V = \{x \in [a,b] : F(x) > 0\}$ открыто и поэтому производная $(F^+)'(x) = f(x)$ во всех точках множества $D_1 \cap V$. Пусть теперь x — предельная точка для пересечения $\{x \in [a,b] : F(x) = 0\} \cap D_1$ (заметим, что совокупность изолированных точек не более чем счетная). Очевидно $F'(x) = f(x) = 0$. Поэтому $F(y) = o(y-x)$. Отсюда тем более имеем $F^+(y) = o(y-x)$. Следовательно, $(F^+)'(x) = f(x) = 0$. Таким образом, производная функции F^+ существует в почти всех точках отрезка $[a,b]$, непрерывна почти всюду на области определения и производная $(F^+)'(x)$ совпадает с функцией f_{F^+} почти всюду.

3) Третье утверждение формально получается из второго заменой F на $-F$, а f на $-f$.

4) Четвертое утверждение получается из предыдущих, поскольку $|F| = F^+ + F^-$.

5) Пятое (шестое) утверждение получается из предыдущих, поскольку $\max(F,G) = (F-G)^+ + G \quad (\min(F,G) = G - (G-F)^+)$.

13.10. Теорема. *Пусть $D \subset [a,b]$ — множество полной меры на $[a,b]$, т. е., $|[a,b] \setminus D_1| = 0$. Пусть еще функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица, дифференцируема на множестве $D \subset [a,b]$ полной меры, и ее производная $D \ni x \mapsto f'(x)$ непрерывна почти всюду на D относительно меры Лебега. Тогда совокупность точек $\{x \in D : f'(x) > 0\}$ содержится в открытом множестве $U \subset [a,b]$ таком, что $|U \setminus D| = 0$. Если $U = \bigcup\limits_k U_k$ — представление U в виде объединения дизъюнктной совокупности интервалов, то на каждом из них функция $f : U_k \to \mathbb{R}$ монотонно возрастает.*

Аналогично, совокупность точек $\{x \in D : f'(x) < 0\}$ содержится в открытом множестве $V \subset [a,b]$ таком, что $|V \setminus D| = 0$. Если $V = \bigcup\limits_l V_l$ — представление V в виде объединения дизъюнктной совокупности интервалов, то на каждом из них первообразная $f : V_l \to \mathbb{R}$ монотонно убывает.

Доказательство. Рассмотрим случай положительной производной. Можно предполагать, что множество D содержит лишь те точки, в которых производная f' непрерывна. Тогда каждая точка множества $\{x \in D : f'(x) > 0\}$ имеем окрестность $U(x) \subset [a,b]$, в любой точки y которой $f'(y) > 0$. Множество $U = \bigcup\limits_{x \in D,\, f(x) > 0} U(x) \subset [a,b]$ открыто и представимо как объединение дизъюнктной совокупности интервалов: $U = \bigcup\limits_k U_k$, где $U_k = (\alpha_k, \beta_k)$. Очевидно, что $|U \setminus D| = 0$ и по формуле Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(z) + \int\limits_y^x f'(z)\, dz \geq f(y) \quad \text{для любых точек } \alpha_k \leq y < x \leq \beta_k,$$

поскольку подинтегральная функция неотрицательна.

Случай отрицательной производной рассматривается аналогично.

Мы применим метод доказательства леммы 12.5 о постоянных функциях для доказательства утверждения об оценке приращения функции $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию Липшица, дифференцируемой почти всюду на $[a,b]$ и производная которой непрерывна почти всюду на области определения относительно меры Лебега.

13.11. Лемма об оценке приращения липшицевой функции. *Пусть функция $\beta : [a,b] \to \mathbb{E}$ обладает следующими свойствами:*

(1) $\beta \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{E})$ *с постоянной Липшица M;*

(2) *функция $\beta(x)$ дифференцируема почти всюду на $[a,b]$ и производная $\beta'(x)$ непрерывна почти всюду на области определения относительно меры Лебега.*

Тогда $|\beta(b)-\beta(a)| \le M\big(\sum\limits_k |U_k| + \sum\limits_l |V_l|\big)$, *где множества U_k и V_l определены в теореме* 13.10.

Доказательство. Обозначим объединение $\bigcup\limits_k U_k \cup \bigcup\limits_l V_l$ дизъюнктных интервалов из теоремы 13.10 символом A. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Множество точек E, где производная $\beta'(x)$ или не определена, или разрывна, имеет меру Лебега нуль. Тогда существует не более чем счетная совокупность интервалов W_j, $j \in \mathbb{N}$, покрывающая E, сумма длин которых $\sum\limits_j |W_j| < \varepsilon/2M$. Для любой точки $x \in [a,b] \setminus (E \cup A)$ производная $\beta'(x) = 0$ и поэтому существует окрестность $\mathcal{O}(x)$ такая, что

$$|\beta(y) - \beta(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}|y-x|$$

для любой точки $y \in \overline{\mathcal{O}}(x)$. Набор интервалов $\{U_k, V_l, W_j, \mathcal{O}(x) : k,l,j \in \mathbb{N},\ x \in [a,b] \setminus (E \cup A)\}$ — открытое покрытие отрезка $[a,b]$. Выберем из него конечное подпокрытие

$$U_1, \dots, U_K, V_1, \dots, V_L, W_1, \dots, W_J, \mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_r).$$

Заметим, что центры этих интервалов можно выбрать такими, чтобы они принадлежали $[a,b]$. По лемме 2.9 существует разбиение $\{P_i\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что замыкание $\overline{P}_i$ любого промежутка P_i содержится в некотором открытом промежутке U_k, $k = 1, \dots, K$, V_l, $l = 1, \dots, L$,

W_j, $j = 1, \dots, J$, или $U(x_n)$, $n = 1, \dots, r$, причем центр этого открытого промежутка принадлежит $\overline{P}_i$.

Упорядочим концевые точки разбиения $\{P_i\}$ отрезка $[a, b]$ (одноточечные промежутки, если таковые имеются, можно исключить из рассмотрения): $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b$. Тогда по неравенству треугольника имеем

$$|\beta(b) - \beta(a)| \le \sum_{q=1}^{m} |\beta(y_q) - \beta(y_{q-1})| \le \sum_{i,\,\overline{P}_i \subset U_k} \operatorname{osc}(\beta; \overline{P}_i)$$

$$+ \sum_{i,\,\overline{P}_i \subset V_l} \operatorname{osc}(\beta; \overline{P}_i) + \sum_{i,\,\overline{P}_i \subset W_j} \operatorname{osc}(\beta; \overline{P}_i) + \sum_{i,\,\overline{P}_i \subset U(x_n)} \operatorname{osc}(\beta; \overline{P}_i)$$

$$\le M \sum_{k=1}^{K} |U_k| + M \sum_{l=1}^{L} |V_l| + \sum_{j=1}^{J} |W_j| + \sum_{n=1}^{r} |U(x_n)|$$

$$\le M \left(\sum_{k=1}^{K} |U_k| + \sum_{l=1}^{L} |V_l| \right) + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a).$$

Сумма двух последних слагаемых равна ε, где ε выбирается произвольным положительным числом. Здесь для оценки $\operatorname{osc}(\beta; \overline{P}_i)$, $\overline{P}_i \subset U(x_n)$, мы воспользовались соотношениями

$$|\beta(y) - \beta(z)| \le |\beta(y) - \beta(x_n)| + |\beta(x_n) - \beta(z)|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4(b-a)} |y - x_n| + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} |z - x_n| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |P_i|$$

для любых точек $y, z \in \overline{P}_i$, так как $x_n \in \overline{P}_i$, а для оценки $\operatorname{osc}(\beta; \overline{P}_i)$ ($\overline{P}_i \subset U_k$, $\overline{P}_i \subset V_l$ или $\overline{P}_i \subset W_j$) — соотношениями

$$|\beta(y) - \beta(z)| \le M|y - z| \le M|P_i|, \ y, z \in \overline{P}_i.$$

Лемма доказана.

14. Сведение интеграла по мере μ к интегралу Римана

Покажем, что полученное в предыдущем разделе описание первообразных может быть полезным и при нахождении интеграла по мере μ. Поскольку мера может быть представлена в виде суммы непрерывной и атомической компонент, см. теоремы 4.37 и 4.38, то вычисления интеграла по произвольной мере, задаваемой некоторой измеряющей функцией, сводится к вычислению интеграла по мере, задаваемой функцией скачков, и интеграла по мере, задаваемой непрерывной измеряющей функцией. В первой части раздела вычисляется интеграл по атомическим мерам, а во второй — исследуется случай специальных измеряющих функций, когда они удовлетворяют условию Липшица. В этом случае при некоторых дополнительных условиях интеграл по такой мере сводится к интегралу Римана.

1. Фиксируем сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{14.1}$$

с положительными членами. Пусть $\{c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, — набор попарно-различных точек на отрезке $[a,b]$. Определим меру промежутка $P \subset [a,b]$ как

$$\mu(P) = \sum_{c_k \in P} a_k \tag{14.2}$$

(см. определение 4.19). Отметим, что $\mu(\{c_j\}) = a_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

14.1. Теорема. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ — *ограниченная функция, а* μ — *мера* (14.2), *определенная на промежутках отрезка* $[a,b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x) = \sum_k a_k f(c_k). \tag{14.3}$$

Доказательство. Пусть M — верхняя оценка для $|f(x)|$: $|f(x)| \le M$ для всех $x \in [a,b]$. Определим ступенчатые функции $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(c_i), & \text{если } x = c_i \text{ для } i = 1,\dots,n, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и $\psi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = c_i \text{ для } i = 1,\dots,n, \\ M, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(здесь разбиение отрезка $[a,b]$ для этих функций составляют одноточечные промежутки $\{c_1\},\dots,\{c_n\}$ и дополнительные к ним на отрезке $[a,b]$ промежутки $P_1,\dots,P_{j_n}$). Очевидно, $|f(x) - \varphi_n(x)| \le \psi_n(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и

$$\int\limits_a^b \psi_n\,d\mu = M\sum_{l=1}^{j_n}\mu(P_l) = M\Big(\mu([a,b]) - \sum_{i=1}^{n}\mu(c_i)\Big) = M\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\mu(c_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(c_i).$$

14.2. Теорема. *Пусть мера μ, задана по измеряющей функции $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ в соответствии с определением 4.8, а функция $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_a^b f(x)\,d\mu_1(x) + \int\limits_a^b f(x)\,d\mu_2(x), \tag{14.4}$$

где меры μ_1 и μ_2 определяются по измеряющим функциям g_1 и g_2 из (4.5) в соответствии с определением 4.8.

Доказательство. Имеем $\mu = \mu_1+\mu_2$ по теореме 4.37. Отсюда вытекает, что $f \in \mathcal{R}_{\mu_i}([a,b];\mathbb{E})$, $i = 1,2$ (множество нулевой μ-меры будет также множеством нулевой μ_i-меры, $i = 1,2$, а затем надо применить критерий интегрируемости 10.5). Более того, для последовательностей ступенчатых функций $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ таких, что

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \le \psi_n(x) \text{ для } x \in [a,b] \text{ и } n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \psi_n(x)\,d\mu(x) = 0,$$

имеем также

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \psi_n(x)\,d\mu_i(x) = 0,\ i = 1,2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\mu_i(x) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu_i(x),\ i = 1,2.$$

Поскольку $\int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu(x)$, то (14.4) получается из просто проверяемого равенства для ступенчатых функций

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu_1(x) + \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,d\mu_2(x)$$

как предел при $n \to \infty$.

14.3. Замечание. *По теореме* 8.38 *получаем следующий метод нахождения интеграла по мере* μ*:*

1) *необходимо разложить меру по теореме* 4.37*:* $\mu = \mu_1 + \mu_2$*;*

2) *интеграл по мере* μ_2 *(второй интеграл справа в разложении* (8.6)*) сводится к нахождению суммы ряда в* 14.3 *;*

3) *в тех случаях, когда мера* μ_1 *задается липшицевой функцией специального вида, интеграл по мере* μ_1 *(первый интеграл справа в разложении* (14.4)*) можно свести к вычислению интеграла Римана (см. п.* 2 *настоящего раздела).*

14.4. Задача. Найти аналог теоремы 14.2 для меры μ, заданной по измеряющей функции $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ в соответствии с определением 4.5 , и функции $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$. (Указание: применить задачу 4.38). Сформулировать метод нахождения интеграла по мере μ по аналогии с замечанием 14.3.

14.5. Задача. Найти аналог теоремы 14.2 для произвольной конечно-аддитивной меры μ. (Указание: применить задачу 4.40). Сформулировать метод нахождения интеграла по мере μ по аналогии с замечанием 14.3.

2. Следующее утверждение является классическим результатом.

14.6. Теорема. *Пусть* $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$*, а производная измеряющей функции* $\alpha \in \mathrm{Lip}([a, b]; \mathbb{R})$ *непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве определения. Тогда интеграл функции* f *по мере* μ *сводится к интегралу Римана:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx. \tag{14.5}$$

Доказательство. По определению интегрируемости существуют последовательности функций $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такие, что

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \le \psi_n(x),\ x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N},\ \text{и}\ \int\limits_a^b \psi_n\, d\alpha \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что по формуле 12.7 имеем

$$\int\limits_c^d d\alpha = \alpha(\langle c,d\rangle) = \alpha(d) - \alpha(c) = \int\limits_c^d \alpha'(x)\, dx$$

для любого промежутка $\langle c,d\rangle \subset [a,b]$. Поэтому интегралы от ступенчатых функций φ_n и ψ можно записать как интегралы Римана:

$$\int\limits_a^b \varphi_n\, d\alpha = \int\limits_a^b \varphi_n\alpha'\, dx, \quad \int\limits_a^b \psi_n\, d\alpha = \int\limits_a^b \psi_n\alpha'\, dx.$$

Следовательно, имеем $|f(x)\alpha'(x) - \varphi_n(x)\alpha'(x)| \le \psi_n(x)\alpha'(x)$, $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\int\limits_a^b \psi_n(x)\alpha'(x)\, dx \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Так как произведения $\varphi_n\alpha'$ и $\psi_n\alpha'$ интегрируемы по Риману, то по теореме 8.31 функция $f\alpha'$ также интегрируема по Риману и

$$\int\limits_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\alpha'(x)\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\, d\alpha = \int\limits_a^b f(x)\, d\alpha.$$

Теорема доказана.

В следующей теореме предлагаются другие условия сведения интеграла по мере μ к интегралу Римана.

14.7. Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$, а производная измеряющей функции $\alpha \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{R})$ непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве, где она определена. Тогда $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ и интеграл по мере μ сводится к интегралу Римана:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx. \tag{14.6}$$

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$, то существуют последовательности $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ такие, что

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \le \psi_n(x),\ \ x \in [a,b],\ \ n \in \mathbb{N},\ \text{ и } \int\limits_a^b \psi_n\,dx \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что одновременно имеем $|f(x) - \varphi_n(x)| \le \psi_n(x)$, $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\int\limits_a^b \psi_n\,d\alpha = \int\limits_a^b \psi_n\alpha'\,dx \le \sup_{x\in[a,b]} \alpha'(x) \int\limits_a^b \psi_n\,dx \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ и

$$\int\limits_a^b f\,d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n\,d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n\alpha'\,dx. \tag{14.7}$$

С другой стороны, $f\alpha' \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$ по критерию интегрируемости Лебега и, полагая $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \alpha'(x)$, получаем

$$\left|\int\limits_a^b f\alpha'\,dx - \int\limits_a^b \varphi_n\alpha'\,dx\right| \le M \int\limits_a^b |f - \varphi_n|\,dx \le M \int\limits_a^b \psi_n\,dx \to 0$$

при $n \to \infty$. Сопоставляя этот результат с формулой (14.7), получаем (14.6).

3. В последнем пункте этого раздела мы приведем два утверждения, которые могут быть полезными при работе с интегралом по произвольной мере.

14.8. Предложение. *Пусть* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$ *измеряющая функция, а* $E \subset [a,b]$ — *множество нулевой* α*-меры. Если* $Z = \{z \in [a,b] : \alpha'(z) = 0\}$, *то*

$$|E \setminus Z| = 0.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и покрытие множества E промежутками $P_i = \{\langle \delta_i, \gamma_i \rangle\}$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что $\sum\limits_i \alpha(\gamma_i) - \alpha(\delta_i) < \varepsilon$. Очевидно,

$$\alpha(E) \subset \bigcup_i \alpha(P_i).$$

Образ $\alpha(P_i)$ содержится в промежутке $Q_i = \{\langle \alpha(\delta_i), \alpha(\gamma_i) \rangle\}$, $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, имеем

$$\alpha(E) \subset \bigcup_i Q_i \quad \text{и} \quad \sum_i |Q_i| = \sum_i \alpha(\gamma_i) - \alpha(\delta_i) < \varepsilon.$$

Следовательно, множество $\alpha(E)$ имеет меру Лебега нуль. По следствию 15.7 множество $\alpha^{-1}(\alpha(E)) \setminus Z$ имеет меру Лебега нуль. Отсюда множество $E \setminus Z \subset \alpha^{-1}(\alpha(E)) \setminus Z$ также имеет меру Лебега нуль.

Следующее утверждение обобщает предложение 14.8.

14.9. Предложение. *Пусть* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *непрерывная измеряющая дифференцируемая почти всюду относительно меры Лебега на отрезке* $[a,b]$ *функция, а* $E \subset [a,b]$ — *множество нулевой* g*-меры. Если* $Z = \{z \in [a,b] : g'(z) = 0\}$, *то*

$$|E \setminus Z| = 0.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и покрытие множества E промежутками $P_i = \{\langle \delta_i, \gamma_i \rangle\}$, $i \in \mathbb{N}$, такое, что $\sum\limits_i g(\gamma_i) - g(\delta_i) < \varepsilon$. Очевидно,

$$g(E) \subset \bigcup_i g(P_i).$$

Образ $g(P_i)$ равен промежутку $Q_i = \{\langle g(\delta_i), g(\gamma_i) \rangle\}$, $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, имеем

$$g(E) \subset \bigcup_i Q_i \quad \text{и} \quad \sum_i |Q_i| = \sum_i g(\gamma_i) - g(\delta_i) < \varepsilon.$$

Следовательно, множество $g(E)$ имеет меру Лебега нуль. По лемме 15.10 множество $g^{-1}(g(E)) \setminus Z$ имеет меру Лебега нуль. Отсюда множество $E \setminus Z \subset g^{-1}(g(E)) \setminus Z$ также имеет меру Лебега нуль.

15. Формула замены переменной

1. Мы рассмотрим вначале простую модельную ситуацию замены переменной, на которой можно увидеть суть дела, обсудить вид формулы и способы ее доказательства.

15.1. Предложение. *Если $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ — непрерывная возрастающая функция такая, что $\alpha(a) = c$, $\alpha(b) = d$, то для любой непрерывной функции $f : [c,d] \to \mathbb{E}$ функция $(f \circ \alpha) \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ и справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(\alpha(x))\, d\alpha(x) = \int\limits_c^d f(y)\, dy. \tag{15.1}$$

Если, кроме того, измеряющая функция α непрерывно дифференцируема, то $(f \circ \alpha)\alpha' \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$ и справедлива формула замены переменной

$$\int\limits_a^b f(\alpha(x))\alpha'(x)\, dx = \int\limits_c^d f(y)\, dy. \tag{15.2}$$

Если $F : [c,d] \to \mathbb{E}$ — первообразная функции f, то $F \circ \alpha : [a,b] \to \mathbb{E}$ — первообразная функции $(f \circ \alpha)\alpha'$.

Доказательство. Функция f непрерывна на отрезке $[c,d]$ и поэтому интегрируема по Риману. Чтобы доказать формулу (15.1) мы применим к правой части теорему 11.2. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что

$$\left| \sum_i f(\eta_i)|Q_i| - \int\limits_c^d f(y)\, dy \right| < \varepsilon$$

для любого разбиения $\{Q_i\}$ отрезка $[c,d]$ такого, что $\delta(\{Q_i\}) < \tau$, и при любом выборе точек $\eta_i \in Q_i$. Заметим, что

$$\sum_i f(\eta_i)|Q_i| = \sum_i f(\alpha(\xi_i))|\alpha(P_i)|,$$

где $\alpha(\xi_i) = \eta_i$, а $\alpha(P_i) = Q_i$. Поскольку функция α равномерно непрерывна, разбиение $\{P_i\}$ можно выбрать настолько мелким, чтобы обеспечить условие $\delta(\{Q_i\}) < \tau$. Тогда по теореме 11.2 функция

$f \circ \alpha : [a, b] \to \mathbb{E}$ интегрируема по измеряющей функции α, и сумма

$$\sum_i f(\alpha(\xi_i))|\alpha(P_i)|$$

может быть подобрана сколь угодно близкой к интегралу

$$\int\limits_a^b f(\alpha(x))\, d\alpha(x).$$

Сопоставляя написанные выше суммы и интегралы, получаем формулу (15.1). Формула (15.2) вытекает из (14.5).

Из правила дифференцирования суперпозиции имеем $(F \circ \alpha)' = (f \circ \alpha)\alpha'$.

2. Наша цель — обобщить формулу (15.2) в двух направлениях: доказать ее для монотонной липшицевой замены переменной, а затем для произвольной липшицевой замены переменной. Из вышеприведенного доказательства видно, что доказательство формулы типа (15.2) может быть получено либо аппроксимацией интегрируемой функции ступенчатыми, либо прямой проверкой того, что $(F \circ \alpha)' = (f \circ \alpha)\alpha'$, где $F : [c, d] \to \mathbb{E}$ — первообразная функции f. Мы реализуем здесь первый способ. Второй способ будет показан в (пп. 3, 4).

Доказательства двух формулируемых ниже теорем о замене переменной базируется на следующей лемме.

15.2. Лемма. *Пусть $\alpha : [a, b] \to [c, d]$ — липшицева функция, производная которой непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве $D \subset [a, b]$ полной меры. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathrm{Step}([c, d]; \mathbb{E})$ функция $(f \circ \alpha) \cdot \alpha' \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{E})$ и справедлива формула*

$$\int\limits_a^b \varphi(\alpha(x))\alpha'(x)\, dx = \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \varphi(y)\, dy. \qquad (15.3)$$

Доказательство. Основная трудность — доказать формулу (15.3) для характеристической функции произвольного промежутка $P = \langle \gamma, \delta \rangle \subset$

$[c,d]$. В этом случае правая часть (15.3) легко вычисляется:

$$\int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \chi_P(y)\,dy$$
$$= \operatorname{sign}(\alpha(b)-\alpha(a))|P\cap[\min(\alpha(a),\alpha(b)),\max(\alpha(a),\alpha(b))]|. \quad (15.4)$$

Покажем, что левая часть (15.3) с $\varphi(y)=\chi_P(y)$ равна тому же выражению. Заметим, что подинтегральная функция в этом случае равна

$$\chi_P(\alpha(x))\alpha'(x)=\begin{cases}\alpha'(x), & \text{если } \alpha(x)\in P,\\ 0, & \text{если } \alpha(x)\notin P.\end{cases}$$

Если $\alpha(a)\in P$, то полагаем $a'=a$. В противном случае среди самых левых корней уравнений $\alpha(x)=\gamma$ и $\alpha(x)=\delta$, $x\in[a,b]$, выбираем меньший (пусть для определенности это будет корень a' второго уравнения; рассмотрение второго возможного случая проще). Аналогично, если $\alpha(b)\in P$, полагаем $b'=b$. Если же $\alpha(b)\notin P$, среди самых правых корней уравнений $\alpha(x)=\gamma$ и $\alpha(x)=\delta$, $x\in[a,b]$, выбираем больший (пусть для определенности это будет корень b' уравнения $\alpha(x)=\gamma$). Очевидно

$$\int\limits_a^b \chi_P(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx=\int\limits_{a'}^{b'} \chi_P(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx. \quad (15.5)$$

Определим функцию

$$[a,b]\ni x\mapsto\beta(x)=\begin{cases}\alpha(x), & \text{если } \alpha(x)\in P,\\ \gamma, & \text{если } \alpha(x)<\gamma,\\ \delta, & \text{если } \alpha(x)>\delta.\end{cases}$$

По теореме 13.9 имеем, что $\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ — липшицева функция, производная которой непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве $D\subset[a,b]$ полной меры, и $\beta'(x)=\alpha'(x)$, если $\alpha(x)\in P$ для $x\in[a',b']$, и $\beta'(x)=0$ во всех остальных точках $x\in[a,b]$ таких, что $\alpha(x)\notin P$. Отсюда имеем

$$\beta'(x)=\chi_P(\alpha(x))\alpha'(x)=\begin{cases}\alpha'(x), & \text{если } \alpha(x)\in P,\\ 0, & \text{если } \alpha(x)\notin P\end{cases} \quad (15.6)$$

для всех точек $x \in D$. Таким образом, подинтегральное выражение в левой части формулы (15.5) интегрируемо по Риману и может быть найдено по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_a^b \chi_P(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = \int\limits_{a'}^{b'} \chi_P(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{a'}^{b'} \beta'(x)\,dx = (\beta(b') - \beta(a'))$$

$$= \operatorname{sign}(\beta(b') - \beta(a'))|P \cap [\min(\beta(a'), \beta(b')), \max(\beta(a'), \beta(b'))]|$$

$$= \operatorname{sign}(\alpha(b) - \alpha(a))|P \cap [\min(\alpha(a), \alpha(b)), \max(\alpha(a), \alpha(b))]|$$

$$= \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \chi_P(y)\,dy.$$

Таким образом, для характеристических функций промежутков из $[a, b]$ формула (15.3) доказана.

Если теперь $\varphi(x) = \sum\limits_i c_i \chi_{P_i}(x)$ — ступенчатая функция, подчиненная разбиению $\{P_i\}$ отрезка $[c, d]$, то на основании доказанного имеем

$$\int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \varphi(y)\,dy = \sum_i c_i \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \chi_{P_i}(y)\,dy$$

$$= \sum_i c_i \int\limits_a^b \chi_{P_i}(x)(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx.$$

Следовательно, формула (15.3) доказана.

15.3. Теорема. *Пусть $\alpha : [a, b] \to [c, d]$ — монотонная липшицева функция, $\alpha(a) = c$, $\alpha(b) = d$, производная которой непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве $D \subset [a, b]$ полной меры. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{R}([c, d]; \mathbb{E})$ функция $(f \circ \alpha) \cdot \alpha' \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{E})$ и справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(y)\,dy. \tag{15.7}$$

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{R}([c,d];\mathbb{E})$, то найдутся последовательности ступенчатых функций $\varphi_n \in \mathrm{Step}([c,d];\mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([c,d];\mathbb{R})$ такие, что

$$|f(y) - \varphi_n(y)| \leq \psi_n(y) \text{ для } y \in [c,d] \text{ и } n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to\infty} \int\limits_c^d \psi_n(y)\,dy = 0.$$

Для этих последовательностей имеем также поточечное соотношение

$$|f(\alpha(x))\alpha'(x) - \varphi_n(\alpha(x))\alpha'(x)| \leq \psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)| \text{ для } x \in [a,b] \text{ и } n \in \mathbb{N},$$

и в силу леммы 15.2 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \psi_n(y)\,dy = 0,$$

поскольку производная $\alpha'(x)$ имеет постоянный знак. По теореме 8.31

функция $f(\alpha(x))\alpha'(x)$ интегрируема по Риману, так как функции $\varphi_n(\alpha(x))\alpha'(x)$ и $\psi_n(\alpha(x))\alpha'(x)$ интегрируемы по Риману, $n \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$\int\limits_a^b f(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \varphi_n(y)\,dy = \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(y)\,dy.$$

Теорема 15.3 доказана.

В следующей теореме мы докажем формулу замены переменной для немонотонной функции φ при минимальных предположениях гладкости. Доказательство следует схеме доказательства теоремы 15.3, однако, значительно отличается в деталях, поскольку в этом случае производная заменяющей функции может менять знак.

15.4. Теорема. *Пусть $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ — липшицева функция, производная которой непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве $D \subset [a,b]$ полной меры. Тогда для любой функции*

$f \in \mathcal{R}([c,d];\mathbb{E})$ функция $(f \circ \alpha) \cdot \alpha' \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$ и справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(x)\,dx. \tag{15.8}$$

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{R}([c,d];\mathbb{E})$, то найдутся последовательности ступенчатых функций $\varphi_n \in \mathrm{Step}([c,d];\mathbb{E})$ и $\psi_n \in \mathrm{Step}([c,d];\mathbb{R})$ такие, что

$$|f(y) - \varphi_n(y)| \le \psi_n(y) \text{ для } y \in [c,d] \text{ и } n \in \mathbb{N}, \; \lim_{n\to\infty} \int\limits_c^d \psi_n(y)\,dy = 0.$$

Для этих последовательностей имеем также поточечное соотношение

$$|f(\alpha(x))\alpha'(x) - \varphi_n(\alpha(x))\alpha'(x)| \le \psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)| \text{ для } x \in [a,b] \text{ и } n \in \mathbb{N}.$$

Функция $\psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)|$ интегрируема по Риману, так как интегрируемой является функция $\chi_P(\alpha(x))|\alpha'(x)|$, где χ_P — характеристическая функция промежутка $P \subset [a,b]$ (непосредственно проверяется, что $\chi_P(\alpha(x))|\alpha'(x)| = |\beta'(x)|$), где интегрируемая функция $\beta'(x)$ определена соотношением (15.6). Функция $\varphi_n(\alpha(x))\alpha'(x)$ также интегрируема по Риману, $n \in \mathbb{N}$. Для того, чтобы по теореме 8.31 сделать вывод об интегрируемости по Риману функции $f(\alpha(x))\alpha'(x)$, требуется доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)|\,dx = 0. \tag{15.9}$$

Пусть $D \subset [a,b]$ — множество полной меры на $[a,b]$, во всех точках которого существует производная $\alpha'(x)$. В соответствии с теоремой 13.10 множество $\{x \in D : \alpha'(x) > 0\}$ содержится в открытом множестве $U \subset [a,b]$ таком, что $|U \setminus D| = 0$. Более того, U имеет представление в виде объединения дизъюнктной совокупности интервалов: $U = \bigcup\limits_k U_k$. На каждом интервале U_k функция $\alpha : U_k \to \mathbb{R}$ монотонно возрастает.

Аналогично, множество $\{x \in D : \alpha'(x) < 0\}$ содержится в открытом множестве $V \subset [a,b]$ таком, что $|V \setminus D| = 0$. Если $V = \bigcup\limits_l V_l$ —

представление V в виде объединения дизъюнктной совокупности интервалов, то на каждом из них функция $\alpha : V_l \to \mathbb{R}$ монотонно убывает.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |U_k| + \sum_{l=N+1}^{\infty} |V_l| < \varepsilon. \tag{15.10}$$

Функцию $\psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)|$ представим как сумму двух функций:

$$\psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)| = g_n + \theta_n(x),$$

где

$$[a,b] \ni x \mapsto g_n(x) = \begin{cases} \psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)|, & \text{если } x \in \bigcup\limits_{k=1}^{N} U_k \bigcup \bigcup\limits_{l=1}^{N} V_l, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция $g_n(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ в силу аддитивности интеграла Римана: $\psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)|$ интегрируема по Риману на каждом из интервалов U_k, $k = 1,\ldots,n$, или V_l, $l = 1,\ldots,l$. Для интегрируемой по Риману разности $\theta_n(x) = \psi_n(\alpha(x))|\alpha'(x)| - g_n(x)$ очевидно справедлива оценка $|\theta_n(x)| \le \Theta_n(x)$, где функция $\Theta_n(x)$ определена как

$$[a,b] \ni x \mapsto \Theta_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \bigcup\limits_{k=1}^{N} U_k \bigcup \bigcup\limits_{l=1}^{N} V_l, \\ C|\alpha'(x)| & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

(здесь C — верхняя оценка для $\psi_n(y)$, $y \in [c,d]$, $n \in \mathbb{N}$; функции $\psi_n(y)$ можно предполагать ограниченными в силу замечания 8.7). Функция $\Theta_n(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ по критерию Лебега. Полагая в лемме 13.11 $\beta_n(x) = \int\limits_a^x \Theta_n(t)\,dt$, оценим функцию $\beta_n(x)$ с учетом (15.10). Если $|\alpha'(x)| \le S$ для всех точек $x \in [a,b]$, то получаем

$$\int\limits_a^b \Theta_n(x)\,dx \le CS\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |U_k| + \sum_{l=N+l}^{\infty} |V_l|\right) < CS\varepsilon \tag{15.11}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ одновременно. Остается показать, что

$$\int\limits_a^b g_n(x)\,dx \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{15.12}$$

Для этого достаточно проверить, что сходимость (15.12) имеет место на каждом интервале $U_k = (\gamma_k, \delta_k)$, $k = 1, \ldots, N$, и интервале V_l, $l = 1, \ldots, N$. Достаточно проверить для первого интервала, для второго проверяется аналогично. По лемме 15.2 с учетом положительности производной $\alpha'(x)$ на интервале U_k имеем

$$0 \leq \int\limits_{\gamma_k}^{\delta_k} \psi_n(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = \int\limits_{\alpha(\gamma_k)}^{\alpha(\delta_k)} \psi_n(y)\,dy \leq \int\limits_c^d \psi_n(y)\,dy \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, с учетом (15.11) и (15.12) сходимость (15.9) доказана.

Отсюда имеем $f(\alpha(\cdot))\alpha'(\cdot) \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$ и

$$\int\limits_a^b f(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(\alpha(x))\alpha'(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \varphi_n(y)\,dy = \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(y)\,dy.$$

Таким образом, теорема 15.8 доказана.

3. В этом пункте мы приведем независимое от изложенного доказательства того что в условиях теоремы 15.8 справедливо равенство $(F \circ \alpha)' = (f \circ \alpha)\alpha'$, где $F : [c,d] \to \mathbb{E}$ — первообразная функции f. Мы установим вначале некоторые представляющие независимый интерес утверждения, необходимые для дальнейшего изложения. Изучаемый вопрос состоит в нахождении условий на функцию, гарантирующих, что множество меры Лебега нуль переходит во множество нулевой меры Лебега.

15.5. Теорема. *Пусть $\varphi \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{R})$, а $E \subset [a,b]$ — множество нулевой меры Лебега. Тогда образ $\varphi(E)$ также имеет нулевую меру Лебега.*

Доказательство. По условию теоремы существует постоянная M такая, что $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le M|x - y|$ для любых точек $x, y \in [a, b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\{P_i\}$ — набор промежутков такой, что $E \subset \bigcup\limits_i P_i$ и $\sum\limits_i |P_i| < \varepsilon/M$. Тогда образ $\varphi(P_i)$ является промежутком, и

$$\varphi(E) \subset \bigcup_i \varphi(P_i).$$

Заметим, что длина промежутка $\varphi(P_i)$ равна

$$\operatorname{osc}(\varphi; P_i) = \sup_{x,y \in P_i} |\varphi(x) - \varphi(y)| \le \sup_{x,y \in P_i} M|x - y| \le M|P_i|.$$

Отсюда

$$\sum_i |\varphi(P_i)| = \sum_i \operatorname{osc}(\varphi; P_i) \le M \sum_i |P_i| < \varepsilon.$$

Следовательно, множество $\varphi(E)$ имеет нулевую меру Лебега.

15.6. Следствие. *Пусть функция $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ принадлежит классу C^1. Тогда образ множества E нулевой меры Лебега имеет нулевую меру Лебега.*

Доказательство. Пусть $D_n = [a + n^{-1}, b - n^{-1}]$, где $n \in \mathbb{N}$ такое число, что отрезок D_n не вырожден. Тогда функция $\varphi : D_n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на D_n в силу задачи 13.1. Поэтому образ $\varphi(D_n \cap E)$ имеет меру нуль по теореме 15.5. Поскольку образ $\varphi(E)$ равен объединению $\bigcup\limits_n \varphi(D_n \cap E)$ множеств нулевой меры Лебега, то он также имеет нулевую меру Лебега.

15.7. Следствие. *Пусть функция $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ принадлежит классу C^1.*

1) *Если $\varphi'(x) \ne 0$, то прообраз множества нулевой меры Лебега имеет нулевую меру Лебега.*

2) *Если $Z = \{z \in (a, b) : \varphi'(z) = 0\}$, то*

$$|\varphi^{-1}(E) \setminus Z| = 0.$$

Доказательство. 1) Действительно, функция $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ монотонна и обратная к ней функция ψ принадлежит классу C^1. Поскольку $\varphi^{-1}(E) = \psi(E)$, то, в силу предыдущего следствия, мера Лебега $\varphi^{-1}(E)$ равна нулю, если только E имеет нулевую меру Лебега.

2) Далее мы покажем, что мера Лебега множества $B = \varphi^{-1}(E) \setminus Z$ равна нулю. Заметим, что $B = \varphi^{-1}(E) \cap \{x \in [a,b] : \varphi'(x) \neq 0\}$. Множество $U = \{x \in [a,b] : \varphi'(x) \neq 0\}$ открыто, поэтому $U = \bigcup\limits_{j \in \Lambda} (\alpha_j, \beta_j)$ по теореме 2.12, причем интервалы (α_j, β_j) взаимно не пересекаются, а Λ не более, чем счетная совокупность индексов. Поскольку $B = \bigcup\limits_{j} \varphi^{-1}(E) \cap (\alpha_j, \beta_j)$, то достаточно показать, что мера Лебега пересечения $\varphi^{-1}(E) \cap (\alpha_j, \beta_j)$ равна нулю для любого $j \in \Lambda$. Этот факт вытекает из предыдущего утверждения, так как функция $\varphi : (\alpha_j, \beta_j) \to \mathbb{R}$ имеет отличную от нуля производную на интервале (α_j, β_j).

В следующей утверждении доказательство формулы основано на проверке того, что что $(F \circ \alpha)' = (f \circ \alpha)\alpha'$, где $F : [c,d] \to \mathbb{E}$ — первообразная функции f, где φ — немонотонная функция класса C^1.

15.8. Теорема. *Если $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ — непрерывно дифференцируемая функция, то для любой функции $f \in \mathcal{R}([c,d]; \mathbb{E})$ функция $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{R}([a,b]; \mathbb{E})$ и справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{R}([c,d]; \mathbb{E})$, то множество E точек разрыва функции f имеет меру Лебега нуль. Покажем, что функция $[a,b] \ni x \mapsto g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ ограничена и множество ее точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

Заметим, прежде всего, что ограниченность $g(x)$ вытекает из ограниченности функции $f(x)$ и ограниченности производной $\varphi'(x)$.

Пусть $Z = \{x \in [a,b] : \varphi'(x) = 0\}$. Очевидно, что функция $g(x)$ непрерывна в точках множества Z. Непосредственно проверяется, что что функция $g(x)$ непрерывна в точках множества $[a,b] \setminus (\varphi^{-1}(E) \setminus Z)$. По следствию 15.7 множество $\varphi^{-1}(E) \setminus Z$ имеет меру Лебега нуль. Следовательно, функция g непрерывна почти всюду на отрезке $[a,b]$ относительно меры Лебега. Таким образом, интегрируемость по Риману функции g доказана.

Пусть F — первообразная Лебега функции f на отрезке $[c,d]$. Проверим, что $F \circ \varphi$ есть первообразная Лебега функции g на отрезке $[a,b]$. Если M — постоянная Липшица функции F, а $|\varphi'(x)| \leq L$ для всех точек $x \in [a,b]$, то, применяя теорему Лагранжа и задачу 13.1, получаем

$$|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leq M|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq ML|x-y|.$$

Отсюда вытекает, что $F \circ \varphi$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной ML.

Сохраняя прежние обозначения, мы можем непосредственно проверить, что $F \circ \varphi$ дифференцируема во всех точках множества Z. Действительно, если $x \in Z$, то $\varphi'(x) = 0$, и поэтому

$$|F \circ \varphi(y) - F \circ \varphi(x)| \leq M|o(y-x)| = o(y-x).$$

Отсюда

$$\frac{d(F \circ \varphi)}{dx}(x) = 0.$$

Если $\Sigma \subset [c,d]$ — множество точек, где производная функции F либо не существует, либо не совпадает с функций f (его мера Лебега равна нулю), то по следствию 15.7 множество $\varphi^{-1}(\Sigma) \setminus Z$ имеет меру Лебега нуль. Если $x \in [a,b] \setminus (\varphi^{-1}(\Sigma) \setminus Z)$, то дифференцируемость суперпозиции вытекает из правила дифференцирования сложной функции. Таким образом, установлено, что $F \circ \varphi$ есть первообразная Лебега функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ на отрезке $[a,b]$. Окончательно получаем

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

4. В этом пункте мы докажем формулу замены переменной методом предыдущего пункта для немонотонной функции φ при минимальных предположениях гладкости.

15.9. Теорема. *Пусть $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ — липшицева функция, производная которой непрерывна почти всюду относительно меры Лебега на множестве $D \subset [a,b]$ полной меры. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{R}([c,d];\mathbb{E})$ функция $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{E})$ и справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Доказательство теоремы 15.9 следует схеме доказательства предыдущей теоремы с тем лишь отличием, что вместо следствия 15.7 следует применить доказываемую ниже лемму 15.10.

15.10. Лемма. *Пусть $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая почти всюду относительно меры Лебега на отрезке $[a,b]$ функция, а $E \subset \mathbb{R}$ — множество нулевой меры Лебега. Если $Z = \{z \in [a,b] : g'(z) = 0\}$, то*

$$|g^{-1}(E) \setminus Z| = 0.$$

Доказательство. Пусть $A \subset [a,b]$ — множество точек дифференцируемости функции g, в которых производная $g'(x)$ отлична от нуля. В точках множества $[a,b] \setminus (A \cup Z)$ функция g недифференцируема и, следовательно, по условию его мера Лебега равна нулю. Поэтому достаточно доказать, что мера Лебега множества $g^{-1}(E) \cap A$ равна нулю. Пусть

$$A_k = \left\{x \in A : |g(x) - g(y)| \geq \frac{1}{k}|x-y| \quad \text{для всех } y \in \left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right]\right\}.$$

Очевидно $A = \bigcup\limits_k A_k$. Каждое множество A_k, в свою очередь, может быть представлено как объединение конечной совокупности множеств $A_{k,j}$, диаметры которых не превосходят $\frac{1}{k}$: $A_k = \bigcup\limits_j A_{k,j}$. Тогда функция $g : A_{k,j} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{k}|x-y| \leq |g(x) - g(y)| \quad \text{для всех точек } x, y \in A_{k,j}. \tag{15.13}$$

Мы докажем, что пересечение $g^{-1}(E) \cap A_{k,j}$ имеет меру Лебега нуль для всех возможных k и i. Тогда множество $g^{-1}(E) \cap A$, как объединение счетной совокупности $\{g^{-1}(E) \cap A_{k,j}\}$ множеств нулевой меры Лебега, будет множеством нулевой меры Лебега.

Заметим, что если $E \subset \mathbb{R}$ — множество нулевой меры Лебега, то $E \cap g(A_{k,j})$ будет также множеством нулевой меры Лебега. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и покрытие множества $E \cap g(A_{k,j})$ промежутками $Q_i = \{[\delta_i, \gamma_i]\}$, $i \in \mathbb{N}$, такое, что $\sum\limits_i |Q_i| < \varepsilon$. Заметим, что в силу (15.13) прообраз $g^{-1}(Q_i) \cap A_{k,j}$ имеет следующую оценку на диаметр:

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}\{g^{-1}(Q_i) \cap A_{k,j}\} &= \sup\{|x-y| : x, y \in g^{-1}(Q_i) \cap A_{k,j}\} \\ &\leq \sup\{k|g(x) - g(y)| : x, y \in g^{-1}(Q_i) \cap A_{k,j}\} \leq k(\gamma_i - \delta_i) = k|Q_i|. \end{aligned}$$

Следовательно, прообраз $g^{-1}(E) \cap A_{k,j}$ содержится в объединении промежутков $P_i = [\inf g^{-1}(Q_i) \cap A_{k,j}, \sup g^{-1}(Q_i) \cap A_{k,j}]$, причем

$$\sum_i |P_i| \leq k \sum_i |Q_i| < k\varepsilon.$$

Отсюда, мера Лебега множества $g^{-1}(E) \cap A_{k,j}$ равна нулю и лемма доказана.

16. Теоремы о среднем

16.1. Первая теорема о среднем.

(1) *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\frac{1}{\mu([a,b])} \int_a^b f(x)\, d\mu(x) = f(\xi).$$

(2) *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $g \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$ и $g \geq 0$ на $[a,b]$, то существует точка $\zeta \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, d\mu(x) = f(\zeta) \int_a^b g(x)\, d\mu(x).$$

Доказательство. Формулы очевидны, если $f \equiv \mathrm{const}$. Так как первая формула получается из второй при $g \equiv 1$, то достаточно доказать вторую из них.

Пусть $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. В силу свойства монотонности интеграла, имеем

$$m \int_a^b g(x)\, d\mu(x) \leq \int_a^b f(x)g(x)\, d\mu(x) \leq M \int_a^b g(x)\, d\mu(x).$$

Если интеграл в правой части равен нулю, то в качестве ζ можно взять любую точку $\zeta \in [a,b]$. Если же интеграл в правой части не равен нулю, то число

$$\eta = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,d\mu(x)}{\int\limits_a^b g(x)\,d\mu(x)}$$

принадлежит отрезку $[m, M]$. По теореме Коши — Больцано существует точка $\zeta \in [m, M]$ такая, что $f(\zeta) = \eta$.

16.2. Замечание. *Если вместо непрерывной функции f рассмотреть здесь произвольную функцию $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$, то из вышеприведенного доказательства вытекает, что во второй формуле вместо значения $f(\zeta)$ следует написать некоторое число $\eta \in [\inf\limits_{[a,b]} f, \sup\limits_{[a,b]} f]$, так что вторая формула примет следующий вид:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,d\mu(x) = \eta \int\limits_a^b g(x)\,d\mu(x). \tag{16.1}$$

В случае $g \equiv 1$ приходим к следующему соотношению:

$$\frac{1}{\mu([a,b])} \int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) = \eta \in [m, M].$$

Формулу (16.1) принято называть *первой теоремой о среднем.* Очевидно, что вышеприведенные другие формулы являются ее частными случаями.

16.3. Вторая теорема о среднем. *Пусть $g \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$, а $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — монотонная функция. Тогда существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{16.2}$$

Доказательство. Заметим, что так как обе функции g и f интегрируемы по Риману, то по критерию интегрируемости Лебега (см.

также задачу 8.25) их произведение fg также интегрируемо по Риману.

Разобьем доказательство на несколько пунктов.

1) Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ является первообразной Лебега некоторой функции $\varphi \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$, то доказательство теоремы с учетом формулы интегрирования по частям значительно упрощается. Пусть для определенности функция f монотонно возрастает. Положим $G(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$. Тогда, применяя формулу интегрирования по частям и первую теорему о среднем, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)G'(x)\,dx = f(b)G(b) - \int\limits_a^b \varphi(x)G(x)\,dx$$

$$= f(b)G(b) - G(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = f(b)G(b) + (f(a)-f(b))G(\xi)$$

$$= f(a)G(\xi) + f(b)(G(b)-G(\xi)) = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx.$$

2) Пусть теперь $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — произвольная неубывающая функция. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ точками множества $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2^n}\}$ такими, что $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2^n} = b\}$ и 2^n сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, 2^n$, имеют равные длины: $\frac{b-a}{2^n}$. Определим монотонную непрерывную кусочно-линейную функцию $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}), \text{ если } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ i = 1, \ldots, 2^n. \end{cases}$$

Очевидно $f_n(x) = f(x)$ в точках множества $\mathcal{P}_n$. Далее, $f_n \in \mathrm{Lip}([a,b];\mathbb{R})$, f_n дифференцируема на $[a,b]$ всюду за исключением конечного числа точек, и ее производная является ступенчатой функций. Функция $f_n(x)$ является первообразной некоторой ступенчатой функции. Поэтому из предыдущего пункта с функцией f_n вместо f вторая теорема о среднем доказана: существует точка $\xi_n \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f_n(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^{\xi_n} g(x)\,dx + f(b)\int\limits_{\xi_n}^b g(x)\,dx. \tag{16.3}$$

3) На этом этапе мы докажем, что в формуле (16.3) возможен предельный переход при $n \to \infty$. Заметим для этого, что для всех точек x отрезка $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, где $x_{i-1}, x_i \in \mathcal{P}_n$, выполняется следующие соотношения: $f(x_{i-1}) \le f(x) \le f(x_i)$ и $f(x_{i-1}) \le f_n(x) \le f(x_i)$. Поэтому

$$|f(x) - f_n(x)| \le f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Отсюда, полагая $|g(x)| \le M$ для всех точек отрезка $[a,b]$, получаем оценки

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx - \int\limits_a^b f_n(x)g(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)-f_n(x)||g(x)|\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{2^n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-f_n(x)||g(x)|\,dx \le M\sum_{i=1}^{2^n}\sup_{x\in\Delta_i}|f(x)-f_n(x)||\Delta_i|$$

$$\le M\frac{b-a}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}(f(x_i)-f(x_{i-1})) = M(f(b)-f(a))\frac{b-a}{2^n}.$$

Поскольку $n \in \mathbb{N}$ — произвольное число, то доказано, что левая часть формулы (16.3) сходится к левой части формулы (16.2).

Из последовательности точек ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, можно извлечь подпоследовательность ξ_{n_k}, сходящуюся к некоторой точке $\xi \in [a,b]$. Заменяя в формуле (16.3) n на n_k и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем формулу (16.2), поскольку в каждом из интегралов в правой части (16.3) возможен предельный переход. (Докажите!)

17. Интегральные суммы Римана

Сходимость интегральной суммы непрерывной функции к интегралу, установленная в свойстве 11.2, в определенном смысле распространяется на случай произвольной интегрируемой функции.

Пусть $P = \{P_i\}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Выберем произвольно точки $\xi_i \in P_i$ для всех i и рассмотрим сумму

$$S(P, f, \mu) = \sum_i f(\xi_i)\mu(P_i). \tag{17.1}$$

В теореме 11.2 доказано, что если $f : [a,b] \to \mathbb{E}$ — непрерывная функция, то

$$\lim_{\delta(P)\to 0} S(P, f, \mu) = \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x)$$

(здесь $\delta(P)$ — характеристика мелкости разбиения $P = \{P_i\}$, а точка $\xi_i \in P_i$ выбирается произвольным образом). Следовательно, для непрерывной функции f интеграл по мере μ совпадает с пределом римановых сумм. В настоящем разделе мы распространяем интерпретацию интеграла как предела (в определенном ниже смысле) интегральных сумм на случай произвольных функций.

17.1. Определение. Пусть $P = \{P_i\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. *Диаметром* разбиения P называется число

$$\delta(P) = \max_i\{|P_i|\}.$$

17.2. Определение. Пусть на промежутках отрезка $[a,b]$ фиксирована конечно-аддитивная мера μ, а $P = \{P_i\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. *Модулем непрерывности* разбиения P относительно конечно-аддитивной меры μ и интегрируемой по мере μ функции f называется величина

$$\delta(P, \mu, f) = \max_i\{\min(|P_i| + \mu(P_i), |P_i| + \operatorname{osc}(f; P_i))\}, \tag{17.2}$$

где минимум берется по всем неодноточечным промежутка разбиения.

Свойства модуля непрерывности разбиения сформулированы в следующем утверждении.

17.3. Лемма. *Пусть μ — конечно-аддитивная мера, определенная на промежутках отрезка $[a,b]$, f — интегрируемая по мере μ функция. Тогда модуль непрерывности (17.2) разбиения $P = \{P_i\}$ отрезка $[a,b]$ (относительно конечно-аддитивной меры μ и интегрируемой по мере μ функции f) обладает следующими свойствами:*

1) $\delta(P) \le \delta(P, \mu, f)$;
2) $\lim\limits_{r\to 0}\big\{\inf\limits_{P,\ \delta(P)<r} \delta(P, \mu, f)\big\} = 0$.

Доказательство. Первое свойство очевидно. Для доказательства второго надо показать, что для каждого положительного $\varepsilon > 0$ существуют число $r > 0$ и разбиение $P = \{P_i\}$ отрезка $[a, b]$ такие, что $\delta(P) < r$ и $\delta(P, \mu, f) < \varepsilon$. В соответствии с необходимым условием интегрируемости 9.14 для произвольной точки $x \in (a, b)$ имеем $\operatorname{osc}_-(f; x)\operatorname{osc}_-(\mu; x) = 0$ и $\operatorname{osc}_+(f; x)\operatorname{osc}_+(\mu; x) = 0$ (в точке a (b) следует рассмотреть только одностороннее условие $\operatorname{osc}_+(f; a)\operatorname{osc}_+(\mu; a) = 0$ $(\operatorname{osc}_-(f; b)\operatorname{osc}_-(\mu; b) = 0)$).

Отсюда вытекает существование $\delta_x > 0$, $x \in [a, b]$, такого, что при всяком $0 < \delta \le \delta_x$ имеем

$$\min(\operatorname{osc}(f; (x-\delta, x)), \mu(x-\delta, x)) < \varepsilon/2, \quad x \in (a, b), \tag{17.3}$$
$$\min(\operatorname{osc}(f; (x, x+\delta)), \mu(x, x+\delta)) < \varepsilon/2, \quad x \in (a, b), \tag{17.4}$$
$$\min(\operatorname{osc}(f; (a, a+\delta)), \mu(a, a+\delta)) < \varepsilon/2, \quad x = a, \tag{17.5}$$
$$\min(\operatorname{osc}(f; (b-\delta, b)), \mu(b-\delta, b)) < \varepsilon/2, \quad x = b. \tag{17.6}$$

Следовательно, полагая $\rho_x = \min(\varepsilon/2, \delta_x)$, получаем совокупность интервалов $\{U(x) = (x - \rho_x, x + \rho_x) :\ x \in [a, b]\}$, образующих открытое покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме Бореля — Лебега из этой совокупности интервалов можно выбрать конечную совокупность, образующую покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме 2.9 для данной конечной совокупности интервалов существует разбиение $\{\Delta_n\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что замыкание каждого из промежутков разбиения содержится в некотором $U(x)$. Фиксируем для каждого промежутка Δ_n один интервал $U_n = U(x_n)$, в котором он содержится, и разделим его на три (для крайних точек a и b — на два):

$$\Delta_n' = \Delta_n \cap (x - \rho_x, x),\ \Delta_n'' = \Delta_n \cap (x, x + \rho_x) \text{ и } \Delta''' = \{x\}.$$

Полученная совокупность интервалов $P = \{\Delta_n', \Delta_n'', \Delta_n'''\} = \{P_i\}$ обладает свойством: $|P_i| < \varepsilon/2$ для всех i, а в силу неравенств (17.3)–(17.6) имеем $\min(|P_i| + \mu(P_i), |P_i| + \operatorname{osc}(f; P_i)) < \varepsilon$ для всех неодноточечных интервалов P_i. Следовательно, $\delta(P) < r$, где $r = \varepsilon/2$, и $\delta(P, \mu, f) < \varepsilon$. Лемма доказана.

17.4. Задача. Показать, что в случае регулярной меры в качестве модуля непрерывности разбиения, для которого справедливо утверждение леммы 17.3, можно взять величину

$$\delta(P, \mu) = \max_i \{|P_i| + \mu(P_i)\}, \tag{17.7}$$

где максимум берется по всем неодноточечным промежуткам разбиения (ср. с задачей 9.12). Таким образом, в этом случае модуль непрерывности разбиения можно сделать независимым от интегрируемой функции f.

17.5. Определение. Пусть μ — конечно-аддитивная мера, определенная на промежутках отрезка $[a, b]$. Фиксируем ограниченную функцию $f \in \mathcal{B}([a, b]; \mathbb{E})$. Произвольному разбиению $P = \{P_i\}$ отрезка $[a, b]$ сопоставим сумму (17.1):

$$S(P, f, \mu) = \sum_i f(\xi_i)\mu(P_i),$$

где точки $\xi_i \in P_i$ выбираются произвольным образом. Будем говорить, что суммы $S(P, f, \mu)$ сходятся к элементу $\mathcal{I}$ в $\mathbb{E}$ при $\delta(P, \mu, f) \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что при $\delta(P, \mu, f) < \tau$ имеем

$$|S(P, f, \mu) - \mathcal{I}| < \varepsilon \tag{17.8}$$

для любого выбора точек $\xi_i \in P_i$. В этом случае будем писать

$$\lim_{\delta(P, \mu, f) \to 0} S(P, f, \mu) = \mathcal{I} \in \mathbb{E}.$$

17.6. Теорема. (*a*) *Если* $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$, *то выполняется соотношение*

$$\lim_{\delta(P, \mu, f) \to 0} S(P, f, \mu) = \int_a^b f(x)\, d\mu(x). \tag{17.9}$$

(*b*) *Пусть* $f \in \mathcal{B}([a, b]; \mathbb{R})$. *Если существует предел* $\lim\limits_{\delta(P, \mu, f) \to 0} S(P, f, \mu)$, *то* $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{R})$ *и выполняется соотношение* (17.9).

Доказательство. Докажем вначале пункт (*a*) теоремы. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу второго критерия в терминах колебаний, п. 9.15, для $\varepsilon' > 0$ и $\delta > 0$, которые мы подберем позже, найдется разбиение $\Delta = \{T_j, \Delta_i\}$ такое, что $\operatorname{osc}(f; \Delta_i) \geq \varepsilon'$ для всех i и

$$\sum_{i,\, \operatorname{osc}(f;\Delta_i) \geq \varepsilon'} \mu(\Delta_i) < \delta. \tag{17.10}$$

(Здесь, для удобства дальнейших рассуждений, промежутки разбиения Δ разделены на два класса: $\{T_j\}$ и $\{\Delta_i\}$; вторая совокупность составлена из всех промежутков, входящих в сумму (17.10).) Поэтому $\operatorname{osc}(f;T_j) < \varepsilon'$ для всех j.

Пусть $\tau > 0$ — число такое, что $(n+1)(2M + \mu([a,b]))\tau \le \varepsilon/3$, где $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, а n — число промежутков в разбиении Δ.

По лемме 17.3 существуют разбиения $P = \{P_q\}$ отрезка $[a,b]$, у которых модуль непрерывности $\delta(P,\mu,f) < \tau$. Фиксируем любое из них и оценим разность

$$\left|S(P,f,\mu) - \int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)\right|$$
$$= \left|\sum_q f(\xi_q)\mu(P_q)) - \sum_q \int\limits_{P_q} f(x)\,d\mu(x)\right| \le \sum_q \operatorname{osc}(f;P_q)\mu(P_q)$$
$$\le \sum_l \operatorname{osc}(f;P_l)\mu(P_l) + \sum_{t,\,P_t\cap(\bigcup\limits_i \Delta_i)\ne\emptyset}{}' \operatorname{osc}(f;P_t)\mu(P_t) + \sum_m{}'' \operatorname{osc}(f;P_m)\mu(P_m).$$

Здесь первая сумма I_1 распространяется на все неодноточечные промежутки P_l, для которых промежуток P_l содержит концевые точки промежутков, составляющих разбиение Δ, вторая сумма I_2 — на все неодноточечные промежутки P_t, не вошедшие в сумму I_1, для которых $P_t \cap \left(\bigcup\limits_i \Delta_i\right) \ne \emptyset$, а третья сумма I_3 — на все оставшиеся неодноточечные промежутки P_m. (Заметим, что в силу аддитивности интеграла, слагаемые в сумме и интегралах, соответствующие одноточечным промежуткам, сокращаются.) Тогда

$$I_1 \le (n+1)(2M + \mu([a,b]))\delta(P,\mu,f) \le (n+1)(2M + \mu([a,b]))\tau \le \frac{\varepsilon}{3},$$
$$I_2 \le 2M \sum_i \mu(\Delta_i) < 2M\delta,$$
$$I_3 \le \varepsilon'\mu([a,b]).$$

Положим $\delta = \varepsilon/6M$, $\varepsilon' = \varepsilon/3\mu([a,b])$. Тогда для любого разбиения

$P = \{P_q\}$, у которого диаметр $\delta(P, \mu, f) < \tau$, справедливо неравенство

$$\left| S(P, f, \mu) - \int_a^b f(x)\, d\mu(x) \right| < \varepsilon.$$

Перейдем к доказательству пункта (b). Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$, для которых выполняется (17.8) с правой частью, равной $\varepsilon/2$, для любого разбиения $P = \{P_i\}$, для которого $\delta(P, \mu, f) < \tau$, и любого выбора точек $\xi_i \in P_i$. Возьмем точки $\xi_i' \in P_i$ так, чтобы $0 \le f(\xi_i) - f(\xi_i')$. Учитывая (17.8), имеем

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_i f(\xi_i)\mu(P_i) - \sum_i f(\xi_i')\mu(P_i) \\ &\le |S(P, f, \mu) - \mathcal{I}| + |S'(P, f, \mu) - \mathcal{I}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad (17.11) \end{aligned}$$

где $S'(P, f, \mu)$ — интегральная сумма (17.1), соответствующая выбору точек ξ_i'.

Положим

$$\varphi(x) = \sum_i m_i \chi_{P_i}(x) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sum_i M_i \chi_{P_i}(x),$$

где $m_i = \inf\limits_{P_i} f$, а $M_i = \sup\limits_{P_i} f$. Тогда, с одной стороны, $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$, а с другой, из (17.11) получаем

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\mu(x) \le S(P, f, \mu) \le \int_a^b \psi(x)\, d\mu(x),$$

$$\int_a^b \psi(x)\, d\mu(x) - \int_a^b \varphi(x)\, d\mu(x) \le \varepsilon.$$

Применяя критерий 9.17 интегрируемости Дарбу, получаем интегрируемость функции f и оценку

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\mu(x) \le \int_a^b f(x)\, d\mu(x) \le \int_a^b \psi(x)\, d\mu(x).$$

Следовательно,

$$\left| S(P, f, \mu) - \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x) \right| \le \varepsilon.$$

В силу произвола в выборе ε и точек $\xi_i \in P_i$ (17.9) доказано.

18. Интеграл и предельный переход

Цель настоящего раздела — установить условия, при которых предел последовательности интегрируемых функций является интегрируемой функцией.

Напомним, что по определению 8.29 последовательность функций $f_n \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$ *сходится к функции* $f : [a, b] \to \mathbb{E}$ *в интегральной норме*, если $\|f - f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

18.1. Замечание. *Заметим, что в силу теоремы* 8.4 *из сходимости последовательности функций в интегральной норме вытекает* $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$ *и сходимость интегралов:* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, d\mu(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x)$.

18.2. Теорема. *Пусть последовательность функций* $f_n \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$ *сходится равномерно к функции* $f : [a, b] \to \mathbb{E}$*. Тогда*

1) $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{E})$;

2) *последовательность* f_n *сходится к* f *в интегральной норме:*

$$\|f - f_n\| \to 0 \ \ \textit{при} \ \ n \to \infty;$$

3)

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, d\mu(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x);$$

4) *обратное неверно: последовательность функций может сходится в интегральной норме и не сходится равномерно.*

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По условию теоремы существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|f - f_n\|_C = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu([a, b])}$$

для любого $n \geq n_0$. Отсюда вытекает, что f ограничена.

Из условий условия теоремы вытекает также, что $\lim\limits_{m\to\infty} \|f - f_m\| = 0$. Действительно, эта сходимость следует из оценки

$$\|f - f_m\| \leq \|f - f_m\|_C \mu([a, b]).$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 8.4.

Третье утверждение теоремы вытекает из замечания 18.1. Контрпример приводится в следующем пункте.

18.3. Пример. Последовательность функций $[0,1] \ni x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, не сходится равномерно к функции f такой, что $f(x) = 0$, если $x \in [0, 1)$, и $f(1) = 1$. Однако,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^n \, dx = \int\limits_0^1 f \, dx = 0.$$

18.4. Задача. Обобщить теорему 18.2 на случай произвольного промежутка интегрирования.

Пусть дан промежуток $P \subset [a, b]$. Пусть последовательность функций $f_n \in \mathcal{R}_\mu(P; \mathbb{E})$ сходится равномерно к функции $f : P \to \mathbb{E}$. Тогда

1) $f \in \mathcal{R}_\mu(P; \mathbb{E})$;

2) *последовательность f_n сходится к f в интегральной норме:*

$$\|f - f_n\| \to 0 \ \ \text{\textit{при}} \ \ n \to \infty;$$

3)

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_P f_n(x) \, d\mu(x) = \int\limits_P f(x) \, d\mu(x);$$

4) *обратное неверно: последовательность функций может сходится в интегральной норме и не сходится равномерно.*

Пример 18.3 показывает, что предельный переход под знаком интеграла возможен также и в тех случаях, когда последовательность интегрируемых функций не является равномерно сходящейся. Поэтому представляют интерес более общие условия сходимости под знаком интеграла сравнительно со сформулированными в теореме 18.2.

18.5. Теорема. *Пусть последовательность функций* $f_n \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ *ограничена и для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует конечная совокупность промежутков* P_i, $i = 1,\dots,k$, *такая, что сумма их мер меньше* ε: $\sum\limits_i \mu(P_i) < \varepsilon$, *и на дополнении* $[a,b] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ *последовательность функций* f_n *сходится равномерно к некоторой ограниченной функции* $f : [a,b] \to \mathbb{E}$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$, f_n *сходится к* f *в интегральной норме и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) \tag{18.1}$$

Доказательство. Пусть M — верхняя граница для функций $|f_n|$ и $|f|$: $|f(x)| \le M$ и $|f_n(x)| \le M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем конечную совокупность промежутков P_i, $i = 1,\dots,k$, в соответствии с условием теоремы так, чтобы $\sum\limits_i \mu(P_i) < \varepsilon/2M$. Заметим, что объединение конечного числа промежутков $P = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся промежутков T_j, $j = 1,\dots,l$: $P = \bigcup\limits_{j=1}^{l} T_j$, и при этом $\sum\limits_j \mu(T_j) \le \sum\limits_i \mu(P_i) < \varepsilon/2M$. Таким образом, дополнение $[a,b] \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{l} T_j$ состоит из конечного набора промежутков $Q_m = \langle c_m, d_m\rangle$, $m = 1,\dots,p$, на каждом их которых последовательность f_n сходится равномерно к $f\chi_{Q_m}$. Следовательно, $f \in \mathcal{R}_\mu(\langle c_m, d_m\rangle;\mathbb{E})$ в силу задачи 18.4 и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{Q_m} f_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{Q_m} f(x)\,d\mu(x), \quad m = 1,\dots,p. \tag{18.2}$$

По лемме 8.6 существуют ступенчатые функции $\varphi_m \in \mathrm{Step}(\langle c_m, d_m\rangle;\mathbb{E})$ и $\psi_m \in \mathrm{Step}(\langle c_m, d_m\rangle;\mathbb{R})$ такие, что $|f(x) - \varphi_m(x)| \le \psi_m(x)$ на отрезке $\langle c_m, d_m\rangle$ и

$$\int\limits_{Q_m} \psi_m(x)\,d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2p}.$$

Определим теперь ступенчатую функцию $\varphi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{E})$ по правилу:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_m(x), & \text{если } x \in \langle c_m, d_m \rangle,\ m = 1, \ldots, p, \\ 0 \in \mathbb{E}, & \text{если } x \in [a,b] \cap P, \end{cases}$$

и ступенчатую функцию $\psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_m(x), & \text{если } x \in \langle c_m, d_m \rangle,\ m = 1, \ldots, p, \\ M, & \text{если } x \in [a,b] \cap P. \end{cases}$$

Тогда $|f(x) - \varphi(x)| \le \psi(x)$ на отрезке $[a,b]$. Применяя свойство аддитивности (задача 8.18), получаем

$$\|f - \varphi\| \le \int\limits_a^b \psi(x)\,d\mu(x) \le \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{Q_m} \psi_m(x)\,d\mu(x) + M \sum_i \mu(P_i)$$
$$< p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Таким образом, в силу леммы 8.6 доказано, что $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$. Далее,

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x) - \int\limits_a^b f_n(x)\,d\mu(x) \right| \le \int\limits_a^b |f(x) - f_n(x)|\,d\mu(x)$$
$$\le \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{Q_m} |f(x) - f_n(x)|\,d\mu(x) + 2M \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{T_j} d\mu(x)$$
$$\le \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{Q_m} |f(x) - f_n(x)|\,d\mu(x) + 2M \sum_{i=1}^{k} \mu(P_i)$$
$$\le \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{Q_m} |f(x) - f_n(x)|\,d\mu(x) + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (18.3)$$

На основании (18.2) выберем теперь такое n_0, чтобы при $n \ge n_0$ сумма всех интегралов в правой части соотношения (18.3) была меньше ε. Тогда правая часть в этом соотношении меньше 2ε. Так выбор ε произволен, то сходимость f_n к f при $n \to \infty$ в интегральной норме и сходимость (18.1) доказаны.

В следующих двух утверждениях мы показываем, что при некоторых предположениях относительно сходимости предел последовательности в интегральной норме совпадает почти всюду с поточечным пределом интегрируемых функций.

18.6. Теорема. *Пусть последовательность $f_n \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$ интегрируемых по мере μ функций сходится в интегральной норме к функции $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{E})$. Если все функции f_n совпадают на некотором множестве $A \subset [a,b]$, начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$, т. е.,*

$$f_n(x) = h(x) \text{ для всех } x \in A \text{ и } n \geq n_0,$$

то множество $\{x \in A : f(x) \neq h(x)\}$ имеет μ-меру нуль.

Доказательство. Очевидно $\{x \in A : f(x) \neq h(x)\} \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, где $A_m = \{x \in A : |f(x) - h(x)| \geq m^{-1}\}$. Поэтому, в силу свойств множеств нулевой μ-меры, достаточно доказать, что $\mu(A_m) = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. Так как $\|f - f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то существует последовательность $\varphi_n \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ ступенчатых функций такая, что $|f(x) - f_n(x)| \leq \varphi_n(x)$ для всех $x \in [a,b]$ и $\|\varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} A_m = \{x \in A : |f(x) - h(x)| \geq m^{-1}\} &\subset \{x \in A : |f(x) - f_n(x)| \geq m^{-1}\} \\ &\subset \{x \in A : \varphi_n(x) \geq m^{-1}\} \end{aligned}$$

при $n \geq n_0$.

Пусть $\{\Delta_i\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, которому подчинена ступенчатая функция φ_n (разбиение зависит от n). Заметим, что, с одной стороны,

$$A_m \subset \bigcup_{i,\,\varphi_n|_{\Delta_i} \geq m^{-1}} \Delta_i \quad \text{при } n \geq n_0.$$

С другой стороны, в силу неравенства Чебышёва для ступенчатых функций, имеем

$$\sum_{i,\,\varphi_n|_{\Delta_i} \geq m^{-1}} \mu(\Delta_i) \leq m \int\limits_a^b \varphi_n(x)\, d\mu(x)$$

при $n \geq n_0$, где n_0 — из условия теоремы. Поэтому $\mu(A_m) = 0$, так как правая часть в последнем неравенстве может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе n.

18.7. Теорема. 1) *Пусть последовательность функций $f_m \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{R})$ монотонно возрастает (или убывает) и сходится к функции $f \in \mathcal{R}_\mu([a, b]; \mathbb{R})$ в интегральной норме. Тогда функция f совпадает μ-почти всюду с поточечным пределом*

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = h(x).$$

2) *Существует пример монотонной последовательности функций $f_m \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{R})$, которая сходится в интегральной норме к функции $f \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{R})$, и ее поточечный предел не интегрируем по Риману.*

Доказательство. 1) Для определенности будем считать, что данная последовательность монотонно возрастает. Очевидно

$$\begin{aligned}\{x \in [a, b] : f(x) \neq h(x)\}\\ = \{x \in [a, b] : f(x) > h(x)\} \bigcup \{x \in [a, b] : f(x) < h(x)\}.\end{aligned}$$

Обозначим первое множество в правой части символом A, а второе — символом B.

Заметим, что

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{где } A_n = \Big\{x \in A : f(x) - h(x) \geq \frac{1}{n}\Big\}.$$

Так как последовательность f_m монотонно возрастает, то $A_n \subset \big\{x \in A : f(x) - f_m(x) \geq \frac{1}{n}\big\}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и докажем, что мера $\mu(A_n) = 0$: тогда μ-мера множества A будет равна нулю в силу свойств множеств нулевой μ-меры.

Так как $\|f - f_m\| \to 0$ при $m \to \infty$, то существует последовательность $\varphi_m \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{R})$ ступенчатых функций такая, что $|f(x) - f_m(x)| \leq \varphi_m(x)$ для всех $x \in [a, b]$ и $\|\varphi_m\| \to 0$ при $m \to \infty$. Пусть $\{\Delta_i\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, которому подчинена ступенчатая функция φ_m (зависящее от m). Заметим, что, с одной стороны,

$$A_n \subset \bigcup_{i,\, \varphi_m|_{\Delta_i} \geq n^{-1}} \Delta_i.$$

С другой стороны, в силу неравенства Чебышёва для ступенчатых функций, имеем

$$\sum_{i,\,\varphi_m|_{\Delta_i}\geq n^{-1}} \mu(\Delta_i) \leq n \int\limits_a^b \varphi_m(x)\,d\mu(x).$$

Поэтому $\mu(A_n) = 0$, так как правая часть в последнем неравенстве может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе m.

Чтобы доказать, что μ-мера множества B равна нулю, заметим, что

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{где } B_n = \{x \in B : f_n(x) - f(x) > 0\}.$$

Докажем, что $\mu(B_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем n и заметим, что

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k, \quad \text{где } D_k = \{x \in B : f_n(x) - f(x) > k^{-1}\}.$$

Для любого $l \geq n$, в силу неравенства $f_l(x) \geq f_n(x)$, имеем $D_k \subset \{x \in B : f_l(x) - f(x) > k^{-1}\}$.

Так как $\|f - f_l\| \to 0$ при $l \to \infty$, то существует последовательность $\varphi_l \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ ступенчатых функций такая, что $|f(x) - f_l(x)| \leq \varphi_l(x)$ для всех $x \in [a,b]$ и $\|\varphi_l\| \to 0$ при $l \to \infty$. Пусть $\{\Delta_i\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, которому подчинена ступенчатая функция φ_l (зависящее от l). Заметим, что, с одной стороны,

$$D_k \subset \bigcup_{i,\,\varphi_l|_{\Delta_i}\geq k^{-1}} \Delta_i, \quad l \geq n.$$

С другой стороны, в силу неравенства Чебышёва для ступенчатых функций, имеем

$$\sum_{i,\,\varphi_l|_{\Delta_i}\geq k^{-1}} \mu(\Delta_i) \leq k \int\limits_a^b \varphi_l(x)\,d\mu(x), \quad l \geq n.$$

Поэтому $\mu(D_k) = 0$, так как правая часть в последнем неравенстве может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе l.

Следовательно, $\mu(B_n) = 0$, так как B_n равно счетному объединению множеств нулевой μ-меры.

2) Построим контрпример. Рассмотрим отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега на его промежутках и последовательность $x_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, рациональных точек этого отрезка. Пусть f_n — характеристическая функция множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| = 0$, и поэтому f_n сходится к нулю в интегральной норме. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = \chi(x)$ — известная функция Дирихле, не интегрируемая по Риману.

18.8. Теорема. *Пусть измеряющая функция α непрерывна. Пусть последовательность функций $f_n \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$ монотонно возрастает (или убывает) и сходится поточечно μ-почти всюду к функции $f \in \mathcal{R}_\mu([a,b];\mathbb{R})$. Тогда последовательность функций f_n сходится к f в интегральной норме и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, d\mu(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x). \tag{18.4}$$

Доказательство. Проверим, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что $\|f - f_n\| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$.

Множество E точек отрезка $[a,b]$, в которых все функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, и функция f разрывны и в которых последовательность f_n не сходится к f, есть множество нулевой μ-меры.

Возьмем $\sigma = \frac{\varepsilon}{4M}$, где M — верхняя граница для функций $|f_1|$ и $|f|$: $|f(x)| \leq M$ и $|f_1(x)| \leq M$. Для этого числа существует последовательность интервалов V_j такая, что $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(V_j) < \sigma$.

Фиксируем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\mu([a,b])}$. Для любой точки $x \in [a,b] \setminus E$ существует номер n_x такой, что $|f(x) - f_{n_x}(x)| < \frac{\delta}{3}$. Поскольку f и f_{n_x} непрерывны в точке x, то существует окрестность $U(x)$ такая, что для всех $y \in U(x)$ одновременно имеем $|f(y) - f(x)| < \frac{\delta}{3}$ и $|f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| < \frac{\delta}{3}$. Поэтому для для всех $y \in U(x)$ выполняется неравенство

$$|f(y) - f_{n_x}(y)| \leq |f(y) - f(x)| + |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| < 3\cdot\frac{\delta}{3} = \delta.$$

Совокупность интервалов $\{V_j, U(x) : j \in \mathbb{N},\ x \in [a,b] \setminus E\}$ образует открытое покрытие отрезка $[a,b]$. Выделим из него конечное подпокрытие $\{V_{j_1}, \ldots, V_{j_k}, U(x_1), \ldots, U(x_r)\}$.

В силу монотонности последовательности f_n, для срезок $g_n = \mathrm{cut}(M, f_n)$ имеем следующие свойства:

1) множество точек разрыва функции g_n содержится во множестве точек разрыва функции f_n для всех $n \in \mathbb{N}$;

2) $|g_n(x)| \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

3) монотонность последовательности g_n: $g_n \leq g_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

4) совпадение интегралов:

$$\int\limits_a^b g_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_a^b f_n(x)\,d\mu(x)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, так как $f_n(x) = g_n(x)$ μ-почти всюду.
Поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x). \tag{18.5}$$

По теореме 2.12 объединение $V = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{j_i}$, как открытое множество, можно представить в виде объединения попарно непересекающихся интервалов W_q, $q = 1, \ldots, l$: $V = \bigcup\limits_{q=1}^{l} W_q$, и при этом $\sum\limits_q \mu(W_q) \leq \sum\limits_j \mu(V_j) < \sigma$. Таким образом, дополнение $[a, b] \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{l} W_q$ состоит из конечного набора замкнутых промежутков $[c_m, d_m]$, $m = 1, \ldots, p$. Возьмем номер $n_0 = \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_r}\}$. В точках отрезка $[c_m, d_m]$, $m = 1, \ldots, p$, имеем оценку $f(x) - g_n(x) < \delta$ для всех номеров $n \geq n_0$. Определим ступенчатую функцию $\psi \in \mathrm{Step}([a, b]; \mathbb{R})$:

$$\psi(x) = \begin{cases} \delta, & \text{если } x \in [c_m, d_m],\ m = 1, \ldots, p, \\ 2M, & \text{если } x \in [a, b] \cap V. \end{cases}$$

Тогда имеем $|f(x) - g_n(x)| \leq \psi(x)$ на отрезке $[a, b]$ для всех номеров $n \geq n_0$. Следовательно, применяя свойство аддитивности интеграла (задача 8.18), получаем

$$\|f-g_n\| \le \int\limits_a^b \psi(x)\,d\mu(x) \le \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{c_m}^{d_m} \psi(x)\,d\mu(x) + 2M\sum_q \mu(W_q)$$
$$< \delta \sum_{m=1}^{p} \mu([c_m,d_m]) + 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} \le \delta\mu([a,b]) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех номеров $n \ge n_0$. Таким образом, $\|f-g_n\| \to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда вытекает сходимость (18.5).

19. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала над пространством непрерывных функций

19.1. Определение. Пусть V — нормированное пространство над полем скаляров $\mathbb{R}$ с нормой $\|\cdot\|$. Отображение $L: V\to\mathbb{R}$ называется *линейным функционалом*, если

1) $L(\alpha a+\beta b) = \alpha L(a)+\beta L(b)$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и $a,b\in V$.

Линейный функционал называется *ограниченным*, если существует постоянная C такая, что

2) $|L(a)| \le C\|a\|$ для любого $a\in V$.

Наименьшая постоянная в этом неравенстве называется *нормой* функционала L и обозначается символом $\|L\|$.

Из свойств 8.8 и 8.9 вытекает, что если на отрезке $[a,b]$ фиксирована мера μ, то отображение

$$C[a,b] \ni f \mapsto \int\limits_a^b f(x)\,d\mu(x)$$

является линейным ограниченным функционалом L над пространством непрерывных функций:

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int\limits_a^b f\, d\mu + \beta \int\limits_a^b g\, d\mu \tag{19.1}$$

$$\left| \int\limits_a^b f\, d\mu \right| \le \mu([a,b]) \|f\|_C. \tag{19.2}$$

Напомним, что норма в пространстве $C[a,b]$ определяется как $\|f\|_C = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Заметим, что $\|L\| = \mu([a,b])$, так как в (19.2) достигается равенство при $f \equiv 1$.

Кроме того, функционал L обладает также свойством *положительности*:

$$\int\limits_a^b f\, d\mu \ge 0, \quad \text{если } f(x) \ge 0 \text{ для всех } x \in [a,b].$$

Ф. Рисс доказал, что других положительных линейных ограниченных функционалов над пространством непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций не существует.

19.2. Теорема. *Пусть $L : C[a,b] \to \mathbb{R}$ — положительный ограниченный линейный функционал над пространством непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Тогда существует конечно-аддитивная мера μ, определенная на промежутках отрезка $[a,b]$, такая, что*

$$L(f) = \int\limits_a^b f\, d\mu \tag{19.3}$$

для любой функции $f \in C[a,b]$ и, кроме того, $\|L\| = \mu([a,b])$.

Доказательство. 1 шаг. Определим стандартную аппроксимацию характеристической функции замкнутого промежутка $[c,d] \subset \mathbb{R}$ следующим образом: $\varphi^{(n)}_{[c,d]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — непрерывная функция, равная

$$\varphi^{(n)}_{[c,d]}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in [c,d], \\ 0, & \text{если } y \le c - \frac{1}{n} \text{ или } y \ge c + \frac{1}{n}, \\ \text{линейная на промежутках } [c - \frac{1}{n}, c] \text{ и } [c, c + \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Заметим, что последовательность функций $\varphi^{(n)}_{[c,d]}$

1) ограничена в совокупности: $\|\varphi^{(n)}_{[c,d]}\|_C \le 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

2) сходится поточечно к характеристической функции промежутка $[c,d]$: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^{(n)}_{[c,d]}(y) = \chi_{[c,d]}(y)$, причем эта сходимость не является равномерной (проверить!);

3) последовательность $\varphi^{(n)}_{[c,d]}(y)$ монотонно убывает: $\varphi^{(n+1)}_{[c,d]}(y) \le \varphi^{(n)}_{[c,d]}(y)$ для всех $y \in \mathbb{R}$;

4) в случае вырожденного промежутка $[c,c]$ получаем стандартную аппроксимацию $\varphi^{(n)}_{[c,c]}(y)$ характеристической функции одноточечного множества.

Стандартную аппроксимацию $\varphi^{(n)}_Q(y)$ произвольного промежутка Q определим из принципа: *если* $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$, *где* $\{P_i\}$ *— дизъюнктная система промежутков, то стандартная аппроксимация характеристической функции промежутка* Q, *равна сумме стандартных аппроксимаций характеристических функций промежутков* P_i:

$$\varphi^{(n)}_Q(y) = \sum_{i=1}^{k} \varphi^{(n)}_{P_i}(y). \tag{19.4}$$

Из этого принципа получаем стандартные аппроксимации полузамкнутых промежутков

$$\varphi^{(n)}_{[c,d)}(y) = \varphi^{(n)}_{[c,d]}(y) - \varphi^{(n)}_{[d,d]}(y) \quad \text{и} \quad \varphi^{(n)}_{(c,d]}(y) = \varphi^{(n)}_{[c,d]}(y) - \varphi^{(n)}_{[c,c]}(y) \tag{19.5}$$

и открытого промежутка

$$\varphi^{(n)}_{(c,d)}(y) = \varphi^{(n)}_{[c,d]}(y) - \varphi^{(n)}_{[c,c]}(y) - \varphi^{(n)}_{[d,d]}(y). \tag{19.6}$$

Легко проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^{(n)}_P(y) = \chi_P(y)$ для любого промежутка в 19.5 и 19.6.

2 шаг. Заметим, что положительный линейный функционал L обладает свойством монотонности: если $f(x) \le g(x)$ для всех точек $x \in [a,b]$, то $L(f) \le L(g)$. Отсюда вытекает, что если последовательность функций $f_n \in C([a,b])$ монотонна и ограничена в совокупности, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) \in [0,\infty).$$

Определим теперь меру промежутка $P \subset [a,b]$ как предел

$$\mu(P) = \lim_{n\to\infty} L\bigl(\varphi_P^{(n)}\bigr) \in [0,\infty),$$

где функция $\varphi_P^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, — ограничение стандартной аппроксимации промежутка P на отрезок $[a,b]$ (обозначается тем же символом). Этот предел всегда существует для замкнутого (открытого) промежутка, так как его стандартные аппроксимации монотонно убывают (возрастают) и ограничены в совокупности. Мера произвольного промежутка существует в силу (19.5). Из (19.4) получаем свойство конечной аддитивности меры: если $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$, где $\{P_i\}$ — дизъюнктная система промежутков, то

$$\mu(Q) = \lim_{n\to\infty} L\bigl(\varphi_Q^{(n)}\bigr) = \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} L\bigl(\varphi_{P_i}^{(n)}\bigr) = \sum_{i=1}^{k} \mu(P_i). \qquad (19.7)$$

3 шаг. Покажем справедливость представления (19.3), где интегрирование в правой части происходит по только что определенной мере. Для этого проверим, что для произвольных ступенчатой функции $\psi \in \mathrm{Step}([a,b];\mathbb{R})$ и непрерывной функции f, удовлетворяющих условию

$$\psi(y) + \delta \le f(y) \quad \text{для любого } y \in [a,b]$$

с некоторой положительной постоянной δ, выполняется неравенство

$$\int\limits_a^b \psi\, d\mu \le L(f). \qquad (19.8)$$

Действительно, пусть в (19.8) функция ψ имеет представление $\sum\limits_i c_i \chi_{P_i}$. Тогда начиная с некоторого номера n_0 имеем неравенство

$$\sum_i c_i \varphi_{P_i}^{(n)}(y) \le f(y)$$

для всех $y \in [a,b]$ (проверить!). Отсюда получаем

$$\int\limits_a^b \psi\, d\mu = \sum_i c_i \mu(P_i) = \sum_i c_i \lim_{n\to\infty} L\bigl(\varphi_{P_i}^{(n)}\bigr)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_i c_i L\bigl(\varphi_{P_i}^{(n)}\bigr) = \lim_{n\to\infty} L\Bigl(\sum_i c_i \varphi_{P_i}^{(n)}\Bigr) \le L(f). \quad (19.9)$$

Если $f \in C([a,b])$, то для $\varepsilon > 0$ существуют ступенчатые функции ψ и φ такие, что

$$\psi(y) + \frac{\varepsilon}{3} \le f(y) \le \varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |\varphi(y) - \psi(y)| \le \varepsilon$$

для всех $y \in [a,b]$. Отсюда аналогично неравенству (19.8) получаем

$$\int\limits_a^b \psi\, d\mu \le L(f) \le \int\limits_a^b \varphi\, d\mu.$$

Учитывая соотношения

$$\int\limits_a^b \psi\, d\mu \le \int\limits_a^b f\, d\mu \le \int\limits_a^b \varphi\, d\mu$$

выводим

$$\left| L(f) - \int\limits_a^b f\, d\mu \right| \le \left| \int\limits_a^b \varphi\, d\mu - \int\limits_a^b \psi\, d\mu \right| \le \varepsilon \mu([a,b]).$$

В силу произвола в выборе ε, представление (19.3) установлено.

4 шаг. С одной стороны, очевидно

$$|L(f)| \le \left| \int\limits_a^b f(x)\, d\mu(x) \right| \le \|f\|_C \mu([a,b]).$$

С другой стороны, для $f \equiv 1$ имеем

$$0 \le L(1) = \int\limits_a^b d\mu(x) = \mu([a,b]).$$

Следовательно, $\|L\| = \mu([a,b])$.

19.3. Задача. Доказать, что мера μ, построенная в доказательства теоремы 19.2, счетно-аддитивна.

19.4. Задача. По теореме 11.2 всякая конечно-аддитивная мера ν, заданная на промежутках отрезка $[a,b]$, определяет линейный положительный ограниченный функционал L:

$$C([a,b]) \ni f \mapsto \int\limits_a^b f(x)\, d\nu(x).$$

По теореме 19.2 всякий такой функционал имеет представление

$$L(f) = \int_a^b f\,d\mu$$

для любой функции $f \in C[a,b]$. Чем мера μ, построенная в доказательстве теоремы 19.2 отличается от меры ν? Описать прямой способ построения меры μ по мере ν.

(УКАЗАНИЕ: $\mu([c,d]) = \inf\limits_{\delta>0} \mu((c-\delta, d+\delta))$ и т. д.)

19.5. ЗАДАЧА.

Какой линейный функционал над пространством $C([a,b])$ соответствует δ_c-функции Дирака 4.15, $c \in [a,b]$?

В следующем утверждении мы сформулируем теорему Рисса о представлении ограниченных линейных функционалов над пространством непрерывных функций в полном объеме[4].

19.6. ТЕОРЕМА. *Пусть* $L : C[a,b] \to \mathbb{R}$ — *ограниченный линейный функционал над пространством непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *функций. Тогда* L *может быть представлен как разность двух положительных ограниченных линейных функционалов* $L^+ : C[a,b] \to \mathbb{R}$ *и* $L^- : C[a,b] \to \mathbb{R}$ *таких, что*

$$L^+(f) = \sup_{0 \le g \le f,\, g \in C[a,b]} L(g), \tag{19.10}$$

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) = \int_a^b f\,d\mu^+ - \int_a^b f\,d\mu^-, \tag{19.11}$$

$$\|L\| = \|L^+\| + \|L^-\| = \mu^+([a,b]) + \mu^-([a,b]), \tag{19.12}$$

$$|L|(f) = L^+(f) + L^-(f) = \sup_{|g| \le f,\, g \in C[a,b]} L(g), \quad \text{и} \tag{19.13}$$

$$\||L|\| = \|L\| = \|L^+\| + \|L^-\| = \mu^+([a,b]) + \mu^-([a,b]). \tag{19.14}$$

Здесь в формуле (19.11) мера μ^+ (μ^-) — из представления (19.3) для положительного функционала L^+ (L^-).

[4] Ее доказательство можно найти в книге *Л. Шварц. Анализ. Т. 1. М.: Изд-во «Мир», 1972. С. 482–487*

20. Теорема Витали о покрытиях

20.1. Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество, а Δ — некоторая система невырожденных замкнутых промежутков. Если для всякой точки $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой промежуток $d \in \Delta$, что $x \in d$ и $|d| < \varepsilon$, то мы будем говорить, что *система* Δ покрывает множество E в смысле Витали.

20.2. Теорема Д. Витали. *Если ограниченное множество E покрыто в смысле Витали системой Δ замкнутых промежутков, то из Δ можно выделить не более чем счетную совокупность попарно непересекающихся промежутков $\{d_k\} \subset \Delta$ такую, что дополнение*

$$E \setminus \bigcup_k d_k$$

имеет меру Лебега нуль.

Доказательство. Возьмем какой-нибудь интервал U, содержащий множество E, и удалим из Δ все замкнутые промежутки, не содержащиеся целиком в U. Оставшиеся промежутки также покрывают E в смысле Витали, поэтому с самого начала можно считать, что все промежутки из Δ содержатся в U.

Пусть $k_1 = \sup\{|d| : d \in \Delta\}$, а $d_1 \in \Delta$ — произвольный промежуток такой, что

$$|d_1| > 0.75k_1.$$

Если $d_1 \supset E$, то доказательство закончено. В противном случае выберем по индукции замкнутые промежутки $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots \in \Delta$. Если $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \Delta$, $d_i \cap d_j = \emptyset$, $i \neq j$, уже выбраны и $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} d_k \neq \emptyset$, то положим

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} d_k, \quad G_n = U \setminus F_n,$$

и рассмотрим все те промежутки системы Δ, которые содержатся в открытом множестве G_n. Они покрывают множество $E \setminus F_n$ в смысле Витали. Пусть k_{n+1} — точная верхняя грань длин таких промежутков, и обозначим через d_{n+1} тот из них, для которого

$$|d_{n+1}| > 0.75k_{n+1}.$$

Ясно, что $d_{n+1} \cap d_j = \emptyset$, $j = 1, \ldots, n$. Этот процесс или обрывается через конечное число шагов, или приводит к последовательности

$$d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots \in \Delta$$

попарно непересекающихся промежутков. Покажем, что мера Лебега множества $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ равна нулю.

Пусть $D_k = 4d_k$, $k \in \mathbb{N}$, где символ $4d_k$ обозначает отрезок с тем же центром, что и d_k, и длиной, равной $4|d_k|$. Из леммы 4.31 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |D_k| = 4 \sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \leq 4|U|. \tag{20.1}$$

Так как ряд справа сходится, то

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{k=i}^{\infty} |D_k| = 0.$$

Поэтому достаточно доказать, что для всех $i \in \mathbb{N}$ будет

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} d_k \subset \bigcup_{k=i}^{\infty} D_k.$$

Фиксируем $i \in \mathbb{N}$. Пусть $x \in E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k$. Тогда $x \in G_i$ и (поскольку G_i открыто) существует $d \in \Delta$, что $x \in d \subset G_i$. Не может быть такого, чтобы $d \subset G_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, так как в этом случае

$$|d| \leq k_{n+1} < \frac{4}{3}|d_{n+1}|,$$

что невозможно, так как из (4.1) имеем $|d_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $d \cap F_m \neq \emptyset$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$, и пусть n — наименьшее из чисел, удовлетворяющих этому условию. Так как $d \cap F_i = \emptyset$ и $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$, то ясно, что $n > i$. Из определения n вытекает, что

$$d \cap F_{n-1} = \emptyset,$$

откуда имеем, во-первых,

$$d \cap d_n \neq \emptyset,$$

а, во-вторых, $d \subset G_{n-1}$ и, следовательно,

$$|d| \leq k_n < \frac{4}{3}|d_n|.$$

Отсюда вытекает, что $d \subset D_n$ и, тем более,

$$d \subset \bigcup_{k=i}^{\infty} D_k.$$

Значит, из условия $x \in E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ вытекает $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k \subset \bigcup\limits_{k=i}^{\infty} D_k$ и теорема доказана.